۱

جلسه اول ۹۸/۷/۹

فصل اول: تابع

زوج مرتب و حاصلضرب دکارتی:

تعریف: زوج مرتب یک دوتایی به صورت (a,b) می‌باشد که a مؤلفه یا مختص اول و به b مؤلفه یا مختص دوم می‌گویند. اگر در یک زوج مرتب جای مؤلفه‌های اول و دوم تغییر کند آن زوج مرتب هم تغییر می‌کند. یعنی:

$$(a,b) \neq (b,a)$$

تساوی دو زوج مرتب:

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) در صورتی با هم برابر هستند که داشته باشیم

$$(a,b)=(c,d) \iff \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

یک کاربرد زوج مرتب استفاده از آن برای نمایش مختصات یک نقطه در صفحه است. نماد $A(x,y)$ را به معنای نقطه‌ای در صفحه در نظر می‌گیریم که طول آن برابر x و عرض آن برابر y است. x را مؤلفه اول A و y را مؤلفه دوم A می‌نامیم.

مثال: ۱) مقدار x و y را چنان بیابید که دو نقطه $(2x+3y, 3x-2y)$ و $(8,-1)$ برهم منطبق باشند.

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+6y=16 \\ 9x-6y=-3 \end{cases}$$

$$13x=13$$

$$\boxed{x=1} \quad \boxed{y=2}$$

۲) x و y را چنان بیابید که (حذف)

$$(x^2-y^2, 2) = (16, x-y)$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow (x-y)(x+y)=16$$

$$\begin{cases} (x-y)=2 \\ (x+y)=8 \end{cases}$$

$$2x=10 \quad \boxed{x=5} \quad \boxed{y=3}$$

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه:

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B را که با نماد $A \times B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

به عبارت دیگر $A \times B$ مجموعه همه زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه اول آن در مجموعه A و مؤلفه دوم آن در مجموعه B قرار دارد.

مجموعه A را می‌توان در خودش ضرب نمود در این صورت داریم:

$A^2 = A \times A = \{(x,y) \mid x,y \in A\}$

مثال: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5\}$ آنگاه مجموعه‌های $A\times B$ و $B \times A$ و $A^2 = A\times A$ و $B^2 = B\times B$ را بیابید.

$A\times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$

$B\times A = \{(4,1)(4,2)(4,3)(5,1)(5,2),(5,3)\}$

$A^2 = A\times A = \{(1,1)(1,2)(1,3)(2,1)(2,2)(2,3)(3,1)(3,2)(3,3)\}$

$B^2 = \{(4,4)(4,5)(5,4)(5,5)\}$

نکته: اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد آنگاه $A\times B$ دارای mn عضو است.

چون در حالت کلی $(x,y) \neq (y,x)$ پس $A\times B \neq B\times A$ است ولی تعداد اعضای $A\times B$ و $B\times A$ برابر است.

جلسه دوم ۹۸/۷/۱۶

رابطه:

تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. هر زیر مجموعه از مجموعه $A\times B$ را یک رابطه از A به B می‌نامیم. اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه $R \subseteq A\times B$.

اگر $(x,y) \in R$ باشد، می‌گوییم R عنصر x را به عنصر y نسبت می‌دهد و می‌نویسیم xRy.

هر زیر مجموعه ای از حاصلضرب دکارتی $A \times A$ یک رابطه در مجموعه A می‌گویند.

مثال: ۱) اگر $A = \{1,2\}$ آنگاه تمام رابطه های روی مجموعه A را بنویسید.

$$A \times A = \{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$$

هر رابطه روی A زیر مجموعه ای از $A \times A$ است پس تعداد رابطه ها در A برابر است با تعداد زیر مجموعه های $A \times A$ یعنی $2^4 = 16$ که عبارتند از

$\{\}$

$\{(1,1)\}$ $\{(1,2)\}$ $\{(2,1)\}$ $\{(2,2)\}$

$\{(1,1)(1,2)\}$ $\{(1,1)(2,1)\}$ $\{(1,1)(2,2)\}$ $\{(1,2)(2,1)\}$

$\{(1,2)(2,2)\}$ $\{(2,1)(2,2)\}$

$\{(1,1)(1,2)(2,1)\}$ $\{(1,1),(1,2)(2,2)\}$ $\{(1,1)(2,1)(2,2)\}$

$\{(1,2)(2,1)(2,2)\}$

$\{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$

دامنه و برد یک رابطه:

دامنه یک رابطه عبارتست از مجموعه مؤلفه های اول زوج های مرتب متعلق به آن رابطه.

برد یک رابطه عبارتست از مجموعه مؤلفه های دوم زوج های مرتب متعلق به آن رابطه.

مثال: دامنه و برد هر یک از رابطه های زیر را بنویسید:

$f=\{(1,2)(3,4)(5,3)(4,-1)(2,7)\}$

$D_f=\{1,3,5,4,2\}$ $R_f=\{2,4,3,-1,7\}$

نمودار رابطه:

هر رابطه را می توان به صورت نمودارهای پیکانی و دکارتی نمایش داد.

فرض کنید A و B زیر مجموعه های اعداد حقیقی باشند و f یک رابطه از A به B

الف) نمودار دکارتی f مجموعه تمام نقاط (x,y) از صفحه است که $(x,y)\in f$ (زوج...

ب) نمودار پیکانی f به اعضای دامنه و برد را در دو شکل بسته (مثل دایره) قرار می دهیم و سپس با فلش مولفه های اول هر زوج را به مولفه دوم آن نشان می دهیم.

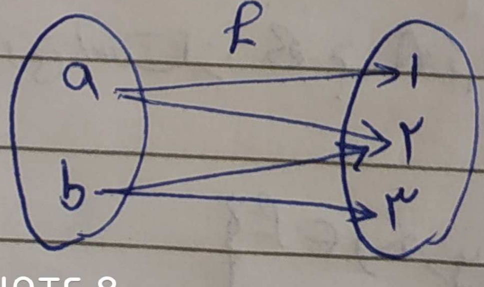
مثال) ۱) نمودار پیکانی هر یک از مجموعه های زیر را نمایش دهید.

الف) $f=\{(a,1)(a,2)(b,2)(b,3)\}$

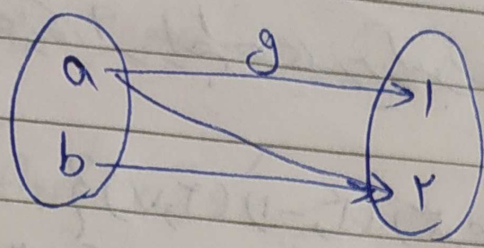
ب) $g=\{(a,1)(b,2)(a,2)\}$

ج) $h=\{(a,2)(b,1)(c,3)\}$

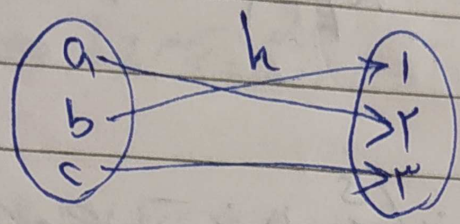
الف)



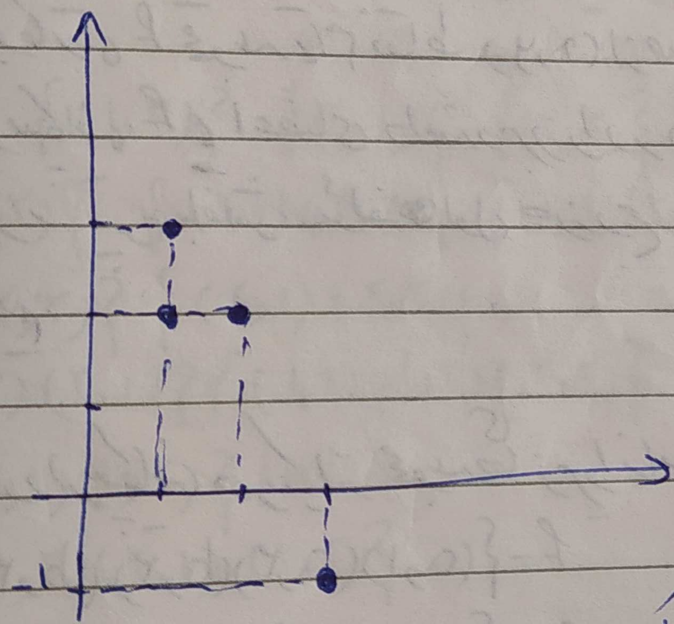
ب)



ج)



۲) فرض کنید $f=\{(1,2),(1,3),(3,-1),(2,2)\}$ در این صورت نمودار مختصاتی f را رسم کنید:



رابطه وارون یا رابطه معکوس:

فرض کنید f یک رابطه از A به B باشد. وارون (معکوس) f را با f^{-1} نشان داده که رابطه ای است از B به A که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-1}=\{(x,y)\mid (y,x)\in f\}$$

به عبارت دیگر هرگاه در یک رابطه جای مؤلفه‌های اول و دوم یعنی x و y را عوض کنیم رابطه وارون یا معکوس بدست می‌آید.

مثال: وارون هر یک از رابطه‌های زیر را بنویسید:

الف) $f=\{(1,2)(1,3)(3,-1)(2,2)\}$

$f^{-1}=\{(2,1)(3,1)(-1,3)(2,2)\}$

ب) $g=\{(1,2)(2,3)(1,3)\}$

$g^{-1}=\{(2,1)(3,2)(3,1)\}$

تابع:

تعریف: یک تابع رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند. معمولاً به جای $(x,y)\in f$ می‌نویسیم: $y=f(x)$

مثال: $f=\{(1,2)(1,3)(2,4)(3,1)\}$ تابع نیست

اما $\{(1,2)(2,4)(3,1)\}$ تابع است.

مثال: مقدار x را طوری بیابید که f یک تابع باشد:

$f=\{(1,2)(2,4)(2,3x-2)\}$

حل:

$3x-2=4 \qquad 3x=6 \qquad \boxed{x=2}$

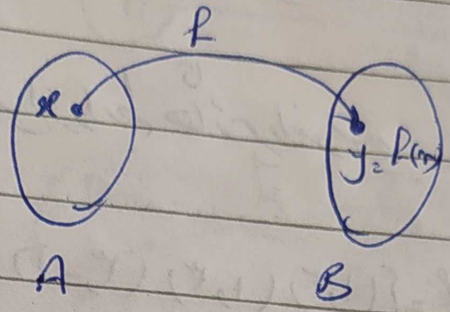
موضوع:

$f: A \to B$

یا $A \xrightarrow{f} B \Rightarrow$ دامنه A

برد B

تابع f



x را متغیر و f را تصویر x می‌نامیم.

دامنه و برد یک تابع:

الف) مجموعه تمام مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تابع f که با نماد D_f نشان می‌دهیم را دامنه تابع می‌نامیم.

$$D_f=\{x \mid (x,y)\in f\}$$

ب) مجموعه تمام مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع f که با نماد R_f نشان می‌دهیم را برد تابع f می‌نامیم.

$$R_f=\{y \mid (x,y)\in f\}$$

مثال: دامنه و برد تابع $f=\{(۱,۲),(۳,۵)(۷,-۹)\}$ را تعیین کنید.

$D_f=\{۱,۳,۷\}$ $\qquad$ $R_f=\{۲,۵,-۹\}$

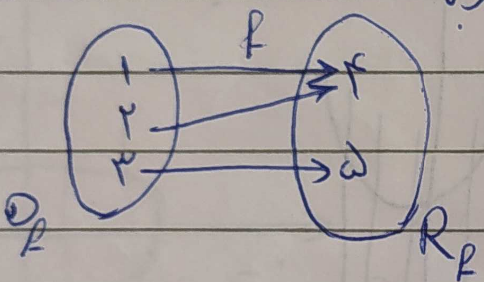
نمایش هندسی یک تابع:

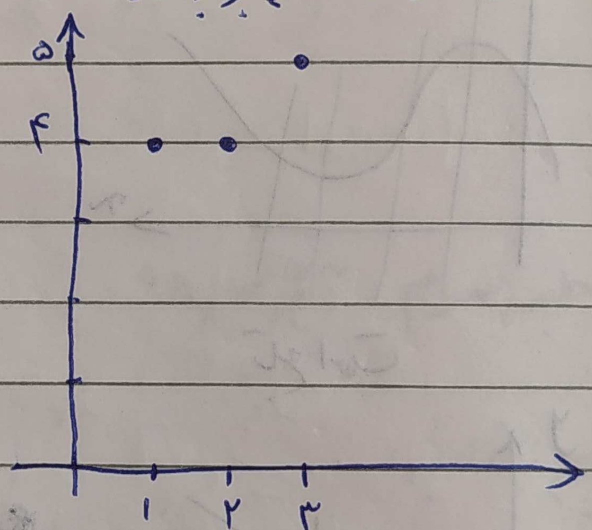
برای نمایش یک تابع از دو روش پیکانی و دکارتی استفاده می‌شود (قبلاً در توضیح رابطه گفته شده است.)

مثال: نمودار پیکانی و دکارتی توابع زیر را رسم کنید و تحقیق کنید که کدام یک از آنها تابع است.

الف) $f=\{(۱,۴)(۲,۴)(۳,۵)\}$

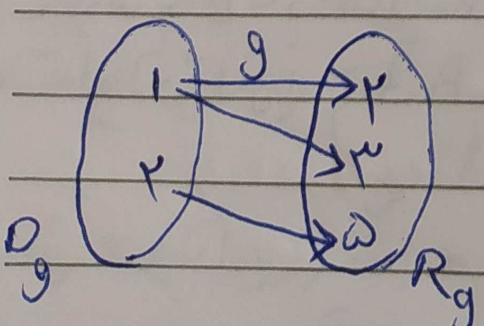
حل: رابطه f تابع است زیرا هیچ دو زوج مرتب در آن مؤلفه اول هم برابر ندارند:

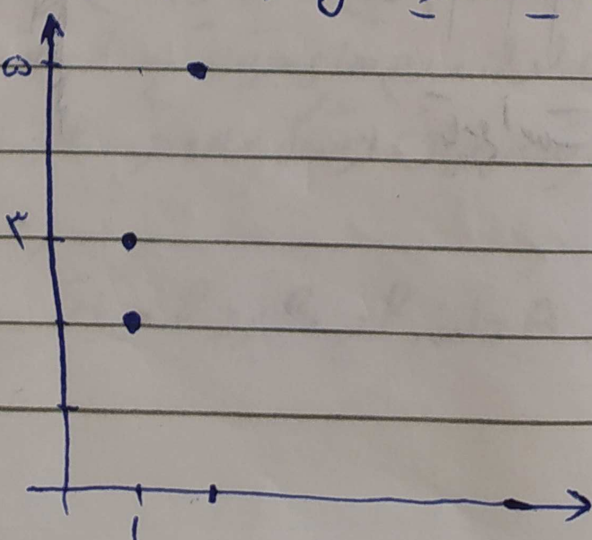




ب) $g=\{(۱,۳)(۲,۵)(۱,۲)\}$

g تابع نیست زیرا $(۱,۳),(۱,۲)\in g$ اما $۲\neq۳$



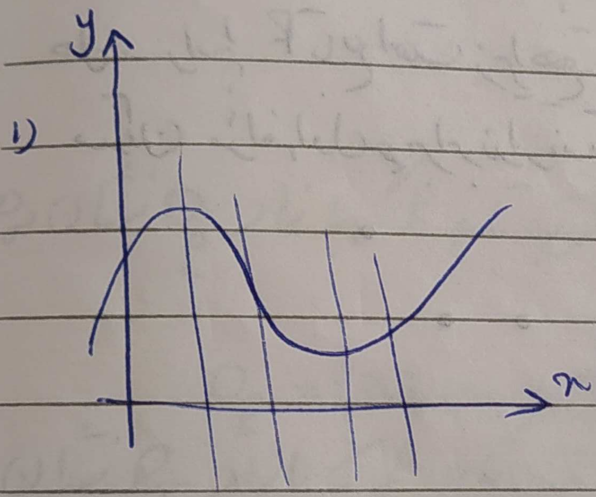


تابع از نظر نمودار پیکانی: یک نمودار پیکانی زمانی تابع است که از هیچ عضو دامنه آن دو (یا بیشتر) پیکان متمایز خارج نشده باشد.

تابع از نظر نمودار دکارتی: یک نمودار دکارتی وقتی نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور yها آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

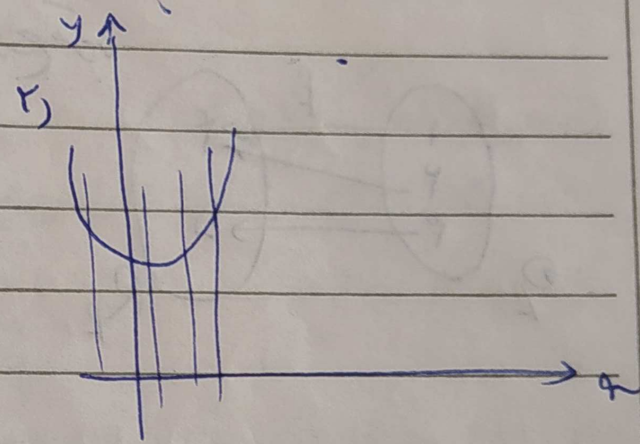
مثال: کدام یک نمودار یک تابع است:

۱)



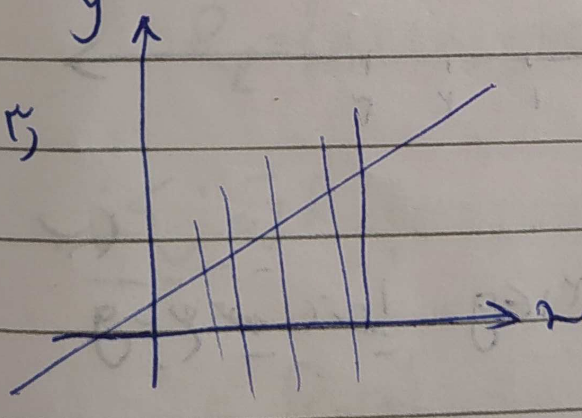
تابع است

۲)

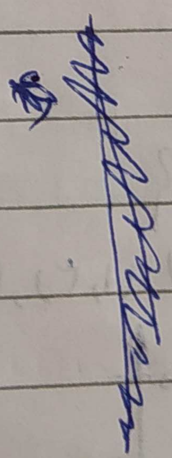


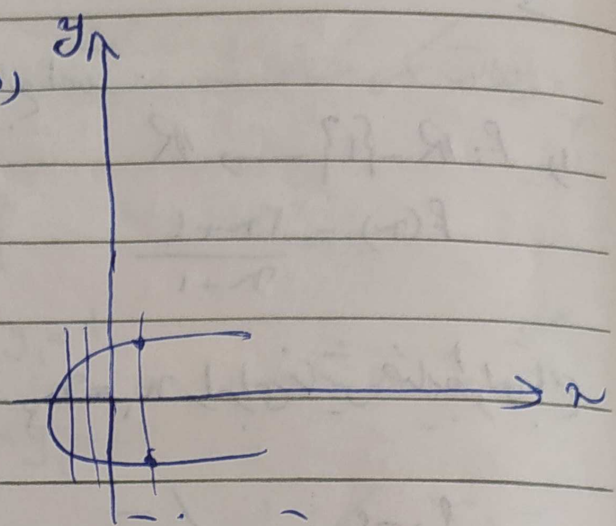
تابع است.

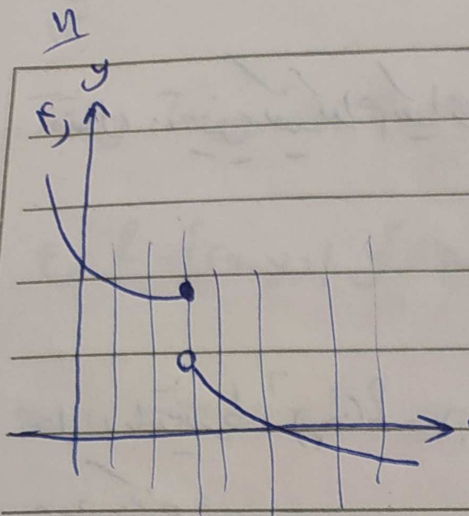
۳)

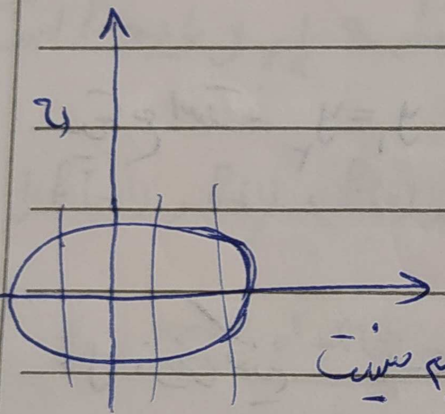


تابع است









جلسه سوم ۹۸/۷/۲۴

تابع با ضابطه:

x ورودی $\longrightarrow$ $\boxed{\text{تابع}}$ $\longrightarrow$ خروجی y

ضابطه

اگر هر مؤلفه های دوم زوج های مرتب تابع f طبق فرمول یا ضابطه خاصی از روی مؤلفه های اول زوج های مرتب تابع f بدست آیند آنگاه به جای استفاده از شکل زوج مرتب می توان از شکل ساده تر $f: A \to B$ برای نمایش تابع استفاده کرد. $y = f(x)$

در این نمایش A دامنه f و B برد f می باشند. x را متغیر و y را تابع x می نامند

مثال: تعیین کنید کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است.

۱) $f: \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

حل: باید شرط $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ را برای نمایش ضابطه‌ای تابع بررسی کنیم.

فرض کنید $x_1 = x_2 = x$ برای دو x مساوی همانگ y باید داشته باشیم!

$$y_1 = \frac{2x+1}{x-1} \qquad y_2 = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow y_1 = y_2$$ پس تابع است

۲) $f = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2=10\}$

حل: فرض کنیم $x=1$

$$\Rightarrow 1+y^2=10 \qquad y^2=9 \qquad y=\pm 3$$

$$\Rightarrow y_1=3 \qquad y_2=-3$$

چون برای یک x دو y متمایز داریم پس f تابع نیست.

۳) $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \pm\sqrt{x}$$

حل: اگر $x=1$ آنگاه $f(1)=\pm 1$

$$y_1=1 \qquad y_2=-1$$

یعنی $(1,1)$ و $(1,-1)$ عضوی از رابطه هستند پس f تابع نیست.

در حالت کلی یک ضابطه وقتی یک تابع است که برای هر x حداکثر یک مقدار y بدست آید.

۴) $f=\{(x,y) \mid y^2=x \ , \ x\in R\}$

حل:

$x=1 \Rightarrow y^2=1 \quad y=\pm 1 \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=-1 \end{cases} \Rightarrow$ تابع نیست

مقدار تابع در یک نقطه:

اگر $(x,y)\in f$ باشد آنگاه مقدار تابع f در نقطه x برابر y یا $f(x)$ است.

مثال: ① اگر $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x+1}$ آنگاه مقدار $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ را بیابید.

$$f(0) \overset{x=0}{=} \frac{0^2+3(0)-2}{0+1} = -2$$

$$f(1) \overset{x=1}{=} \frac{1^2+3(1)-2}{1+1} = 1$$

$$f(-1) \overset{x=-1}{=} \frac{(-1)^2+3(-1)-2}{(-1)+1} = \cancel{\frac{-4}{0}}$$

چون به ازای $x=-1$ مخرج کسر صفر می‌شود پس تابع در $x=-1$ تعریف نشده است.

② اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ آنگاه $f(2)$ ، $f(\frac{1}{x})$ ، $f(2x+1)$ و $f(\sqrt{x})$ را بیابید.

$$f(2)=\frac{2+1}{2-1}=3$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$f(2x+1) = \frac{2x+1+1}{2x+1-1} = \frac{2x+2}{2x} = \frac{x+1}{x}$$

$$f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

تعیین دامنه تابع:

① دامنه توابع چندجمله‌ای

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

برابر $\mathbb{R}$ است.

② دامنه توابع کسری به شرط آنکه صورت آن روی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد برابر است با

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \text{مخرج کسر را صفر می‌کند}\}$$

③ دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج برابر مجموعه مقادیر حقیقی x است که به ازای آنها عبارت زیر رادیکال نامنفی است. یعنی

$$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)} \Longrightarrow D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$$

اگر فرجه فرد باشد دامنه f با دامنه g برابر است یعنی: $D_f = D_g$

④ دامنه توابعی که شامل چندکسر و رادیکال باشد برابر است با اشتراک دامنه آنها

مثال: دامنه توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^3+2x}$

$$x^3+2x=0 \Rightarrow x(x^2+2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \end{cases}$$ ج ندارد

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

~~۲) $f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$~~

۲) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & x\neq 1 \\ 5 & x=1 \end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}$

۳) $f(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{2-x} & -7<x<-2 \\ \sqrt{4-x^2} & -2<x\leq 2 \\ -\dfrac{1}{x} & 2<x \end{cases}$

$D_f=(-7,-2)\cup(-2,2]\cup(2,+\infty)=(-7,+\infty)-\{-2\}$

۴) $f(x)=\begin{cases} -x+2 & x<1 \\ 0 & x=1 \\ x+1 & 1<x \end{cases}$

$D_f=(-\infty,1)\cup\{1\}\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}$

۵) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2\geq 0 \quad -x^2\geq -4 \quad x^2\leq 4 \quad -2\leq x\leq 2$

$D_f=[-2,2]$

۹۸/۸/۱۴

جلسه چهارم

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g را مساوی گوئیم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد :

الف) $D_f = D_g$

ب) تساوی $f(x) = g(x)$ برای تمام x هایی که $x \in D_f = D_g$ برقرار باشد

مثال: تعیین کنید آیا $g(x) = f(x)$ ؟

۱) $g(x) = x+1$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

$D_f \neq D_g \Rightarrow$ $\quad f \neq g$

۲) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

$D_f = D_g$

$f(1) = -1 \quad g(1) = 0 \Rightarrow f \neq g$

تعریف: تابع f را زوج گویند هرگاه

اولاً $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ثانیاً $\forall x \in D_f \quad f(x) = f(-x)$

و تابع f را فرد گویند هرگاه

اولاً $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ثانیاً $\forall x \in D_f \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید.

۱) تابع $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2+4} = \dfrac{x^2}{x^2+4} = f(x) \Rightarrow$ زوج است

۲) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

$D_f = R \Rightarrow \forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ ✓

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+3} = \dfrac{-x}{x^2+3} = -f(x)$ فرد است.

۳) $f(x) = x^2+2x+1$

$D_f = R \Rightarrow \forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$f(-x) = (-x)^2+2(-x)+1 = x^2-2x+1$

پس $f(-x) \neq f(x)$ و $f(-x) \neq -f(x)$

پس f نه زوج و نه فرد است.

توابع حقیقی:

اگر تمام عناصر دامنه و برد تابع f، اعداد حقیقی باشند، f را تابع حقیقی می‌نامیم.

اعمال جبری روی توابع حقیقی:

فرض کنید f و g دو تابع حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g باشند:

$$(f\pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

$$D_{f\pm g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. دامنه توابع f و g و $f\pm g$، $f.g$، $\frac{f}{g}$ را بیابید و ضابطه هر یک را پیدا کنید.

$f: x-2=0 \quad x=2 \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$g: x-1>0 \quad x>1 \quad D_g = (1,+\infty)$

$$D_{f\pm g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = (1,+\infty) - \{2\} = (1,2) \cup (2,+\infty)$$

چون $g(x) \neq 0$. g(x) کسری برابر صفر است که صورت ...

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = (1,2) \cup (2,+\infty)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{1}{x-2} \times \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x-1})}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$$

فصل دوم: حد و پیوستگی

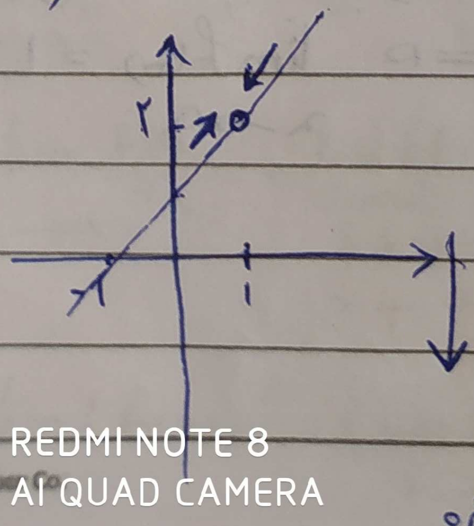
مفهوم حد:

با یک مثال شروع می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

$$g(x) = x+1 \qquad D_g = \mathbb{R}$$



x	$f(x)$
۰	۱
۰/۵	۱/۵
۰/۷۵	۱/۷۵
۰/۹۹	۱/۹۹
⋮	⋮
۰/۹۹۹۹	۱/۹۹۹۹

۱ ↓ ۲ ↓

x	$f(x)$
۲	۳
۱/۵	۲/۵
۱/۲۵	۲/۲۵
۱/۰۰۱	۲/۰۰۱
⋮	⋮
۱/۰۰۰۱	۲/۰۰۰۱

۱ ↓ ۲ ↓

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

به زبان خیلی ساده، حد تابع f(x) حول نقطه a یعنی بررسی خروجی تابع f در نقاطی که بسیار بسیار به a نزدیک هستند و به صورت زیر نمایشش می دهیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

یعنی:

حد تابع f(x) حول نقطه a برابر L است.

در مثال اول فصل دقت کنید اگر از سمت راست به ۱ نزدیک شویم در این صورت حد راست f را بدست می آوریم یعنی:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

و اگر از سمت چپ به ۱ نزدیک شویم در این صورت حد چپ f را می یابیم یعنی

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

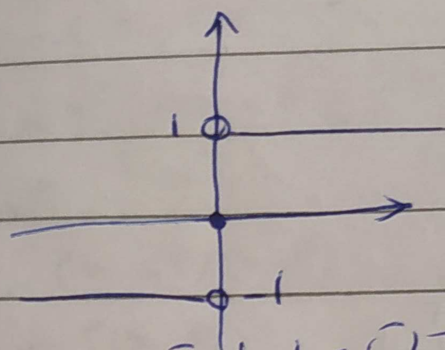
اگر حد چپ و راست برای تابعی در a باهم برابر باشند گوییم آن تابع حول a دارای حد است، به عبارت دیگر:

$$\text{if } \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=L$$

کاربرد حد چپ و راست:

در مطالعه مفهوم حد با توابعی همچون تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ برخورد می‌کنیم

این تابع دارای نمودار زیر است:



یعنی برای $x>0$ مقدار تابع 1 و برای $x<0$ مقدار تابع -1 است.

حد تابع f در صفر وجود ندارد ← $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

قاعده‌های حدگیری: (فرض c عددی ثابت است.)

۱) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$

۲) $\lim\limits_{x\to a} c f(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x) * \lim\limits_{x\to a} g(x)$

۴) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (به شرط $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$)

۵) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^n$