1

(ریاضیات کاربردی)

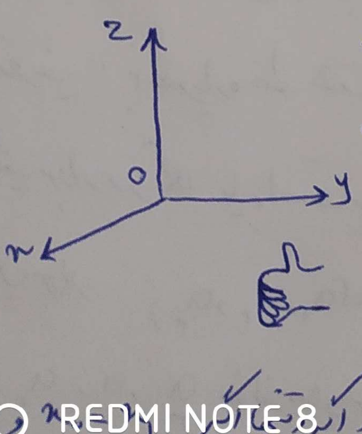
فصل اول: بردارها:

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

قبلاً با فضای $\mathbb{R}^2$ به عنوان مجموعه تمام زوج های مرتب (x,y) که x و y اعداد حقیقی اند آشنا شده‌ایم. $\mathbb{R}^2=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$. همچنین دیده‌ایم که برای نمایش هندسی آن از یک دستگاه مختصات قائم، مرکب از دو خط جهت دار عمود بر هم، به نام محورهای مختصات استفاده کرد. حال می خواهیم فضای $\mathbb{R}^3$ را معرفی کنیم.

منظور از فضای $\mathbb{R}^3$، مجموعه تمام سه تایی های مرتب (x,y,z) است که در آنها x و y و z اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

برای نمایش هندسی $\mathbb{R}^3$ یک دستگاه مختصات قائم مرکب از سه خط جهت دار و دو به دو عمود بر هم به نام محورهای مختصات را معرفی می کنیم که در نقطه O یکدیگر را قطع می کنند و O نقطه مشترک است که از آن نقطه، فاصله در امتداد هر سه خط با یک واحد طول سنجیده می شود. خطوط OX، Oy و Oz به ترتیب محورهای x ها، y ها و z ها نامیده می شوند و خود نقطه O مبدأ مختصات است. این محورها سه صفحه مختصات دو به دو متعامد مشخص می کنند: صفحه xy که شامل محور x ها و y ها، صفحه yz که شامل محور y ها و z ها و صفحه xz که شامل محور x ها و z ها است. در شکل زیر صفحه yz صفحه کاغذ است و جهت مثبت محور x ها به خارج از صفحه کاغذ و در زاویه قائم با صفحه yz اشاره دارد. این دستگاه یک دستگاه راستگرد نامیده می شود. زیرا که با انگشتان دست راست جهت های مثبت روی محورها مشخص می شود. با معلوم بودن سه تایی مرتب (x_0,y_0,z_0) از $\mathbb{R}^3$، نقطه به طول x_0 را بر محور x ها، نقطه به طول y_0 را بر محور y ها و نقطه به طول z_0 را بر محور z ها رسم می کنیم. سپس صفحه گذرا از x_0 و موازی صفحه yz، صفحه گذرا از y_0 و موازی صفحه xz و صفحه گذرا از z_0 و موازی xy را می کشیم. نقطه منحصر به فرد P که در آن، سه صفحه متقاطع هستند، نقطه با مختصات x_0، y_0 و z_0 یا دقیق تر نقطه به طول x_0، عرض y_0 و ارتفاع z_0 است.



$O=(0,0,0)$ را نقطه صفر می نامیم.

دو نقطه $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ بر هم منطبق هستند اگر و تنها اگر $x_0=x_1$، $y_0=y_1$ و $z_0=z_1$.

٢

فاصله نقطه از مبدأ:

فرض کنید $P=(x_0,y_0,z_0)$ فاصله نقطه P از $O=(0,0,0)$ (مبدأ مختصات) را با $|OP|$ نمایش می‌دهیم داریم:

$$|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

حال اگر $Q=(x_1,y_1,z_1)$ باشد آنگاه

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

مثال: اگر $P=(-1,3,6)$ و $Q=(4,0,5)$ مقادیر $|PQ|$، $|OP|$ و $|OQ|$ را بیابید:

$$|PQ|=\sqrt{(4-(-1))^2+(0-3)^2+(5-6)^2}=\sqrt{35}$$

$$|OP|=\sqrt{(-1)^2+3^2+6^2}=\sqrt{46}$$

$$|OQ|=\sqrt{16+0+25}=\sqrt{41}$$

همواره داریم:

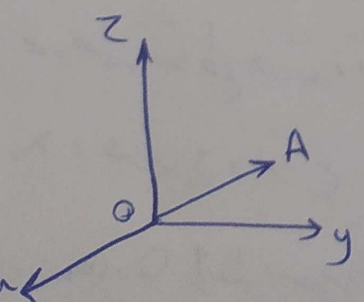
الف) $|PQ|=0$ اگر و تنها اگر $P=Q$.

ب) $|PQ|=|QP|$

ج) به ازای هر نقطه دلخواه $R\in\mathbb{R}^3$ داریم: $|PQ|\leq|PR|+|RQ|$ (نامساوی مثلث)

بردارها در $\mathbb{R}^3$:

فرض کنید $A=(a_1,a_2,a_3)$ نقطه‌ای غیر صفر در $\mathbb{R}^3$ باشد می‌توانیم به نقطه A یک پاره خط جهت دار نسبت دهیم. نقطه شروع این پاره خط $O=(0,0,0)$ و نقطه پایان آن $A=(a_1,a_2,a_3)$ است.



تعریف: به هر پاره خط جهت دار با نقطه شروع $O=(0,0,0)$ یک بردار در $\mathbb{R}^3$ یا به اختصار یک بردار می‌گوییم. اگر نقطه پایان این بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ باشد می‌نویسیم $a=(a_1,a_2,a_3)$ و a_1، a_2، a_3 را مؤلفه‌های بردار a می‌گوییم.

جلسه دوم

همانطور که گفتیم طول بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ برابر است با $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ فرض کنید $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. حاصلجمع این دو بردار را با $a+b$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a+b=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

اگر r عددی حقیقی باشد حاصلضرب r در a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ra=(ra_1,ra_2,ra_3)$$

$-1a$ را با $-a$ نشان داده می‌گوییم قرینه a است. یعنی $-a=(-a_1,-a_2,-a_3)$.

همچنین تفاضل b از a را با $a-b$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$a-b=a+(-b)$$

مثال: برای بردارهای $a=(1,-3,2)$ و $b=(-4,-1,0)$، $a+b$ ، $a-b$ و $\frac{1}{2}a$ را بیابید.

$$(a+b)=(1+(-4),(-3)+(-1),2+0)=(-3,-4,2)$$

$$a-b=(1,-3,2)+(4,1,0)=(5,-2,2)$$

$$-\frac{1}{2}a=-\frac{1}{2}(1,-3,2)=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1)$$

قضیه: فرض کنید a، b، c سه بردار، $0=(0,0,0)$ بردار صفر و r و s دو عدد حقیقی باشند در این صورت:

۱) $a+b=b+a$ (خاصیت جابجایی جمع)

۲) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)

۳) $a+0=0+a=a$

۴) $a+(-a)=(-a)+a=0$

۵) $r(a+b)=ra+rb$

۶) $(r+s)a=ra+sa$

۷) $(rs)a = r(sa)$

۸) $1a = a$

۹) $0a = 0$

۱۰) $r0 = 0$

بردارهای یکه:

بردار یکه برداری است که طول واحد دارد. در بین بردارهای یکه، سه بردار زیر اهمیت و کاربرد زیادی دارند:

$i=(1,0,0) \quad j=(0,1,0) \quad k=(0,0,1)$

هر بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ را می‌توانیم به صورت ترکیب بردارهای i، j و k بنویسیم:

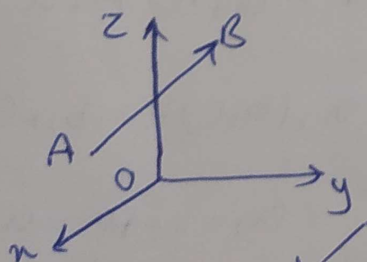
$$a=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)$$
$$=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)$$
$$=a_1 i+a_2 j+a_3 k$$

جلسه سوم:

بردار جهت:

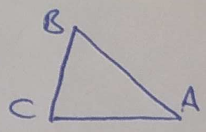
به ازای هر بردار غیرصفر a بردار جهت a برداری با طول واحد و هم راستا و هم جهت a است. اگر بردار جهت a را با e_a نشان دهیم: $e_a=\frac{1}{|a|}a$ و $a=|a|e_a$.

هر پاره خط جهت دار در $\mathbb{R}^3$ نظیر AB را یک پیکان می‌نامیم. اگر A نقطه ابتدای پیکان و B نقطه انتهای آن باشد، پیکان را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نمایش می‌دهیم. هر پیکان را با مختصات ابتدا و انتهایش مشخص می‌کنیم.



از این پس بردار و پیکان را یکی می‌گیریم و از نظر مختصات بردار متناظر با پیکانی که از $P=(x_0,y_0,z_0)$ شروع و به $Q=(x_1,y_1,z_1)$ ختم می‌شود عبارت است از $(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ و آن را بردار هم ارز با $\overrightarrow{PQ}$ می‌نامیم.

مثال: محیط مثلث ABC را با فرض $A=(-1,0,0)$ و $B=(2,0,\sqrt{7})$ و $C=(3,\sqrt{2},\sqrt{7})$ بیابید:



$$AB=\sqrt{(2+1)^2+(0-0)^2+(\sqrt{7}-0)^2}=4$$

$$BC=\sqrt{(3-2)^2+(\sqrt{2}-0)^2+(\sqrt{7}-\sqrt{7})^2}=\sqrt{1+2+0}=\sqrt{3}$$

$$AC=\sqrt{(3+1)^2+(\sqrt{2}-0)^2+(\sqrt{7}-0)^2}=5 \Rightarrow \text{محیط}=9+\sqrt{3}$$

مثال: مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را که $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ بیابید:

$$x_m=\frac{x_0+x_1}{2} \qquad y_m=\frac{y_0+y_1}{2} \qquad z_m=\frac{z_0+z_1}{2} \Rightarrow M=(x_m,y_m,z_m)$$

مثال: $a+b$ و $a-b$ ، ra را محاسبه کنید اگر $a=2i-5j+10k$ ، $b=-i+2j-3k$ و $r=2$ باشد.

$$a+b=(2i-5j+10k)+(-i+2j-3k)=(2-1)i+(-5+2)j+(10-3)k=i-3j+7k$$

$$a-b=(2i-5j+10k)-(-i+2j-3k)=(2+1)i+(-5-2)j+(10+3)k=3i-7j+13k$$

$$ra=2(2i-5j+10k)=(2\times2)i+(-5\times2)j+(2\times10)k=4i-10j+20k$$

مثال: طول بردار $a=\sqrt{2}i-j+k$ را محاسبه و e_a را بیابید:

$$|a|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+(1)^2}=2$$

$$e_a=\frac{a}{|a|} \Rightarrow e_a=\frac{\sqrt{2}i-j+k}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$$

ضرب داخلی: دو بردار غیر صفر a و b را که زاویه بین آنها θ است در نظر می‌گیریم. در این صورت ضرب داخ a و b را با نماد $a.b$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a.b=|a|.|b|\cos\theta$$

اگر a یا b یا هر دو صفر باشند آنگاه θ قابل تعریف نیست و قرارداد می‌کنیم در این حالت $a.b=0$ این ض

ضرب نقطه‌ای یا اسکالر نیز می‌نامیم.

ویژگی های ضرب داخلی:

الف) برای هر دو بردار a و b ، $a.b=b.a$

ب) برای هر دو بردار a و b و عدد حقیقی r: $ra.b = r(a.b) = a.rb$

ج) برای هر بردار a داریم: $a.a = |a|^2$.

د) برای هر دو بردار غیر صفر a و b، a بر b عمود است اگر و تنها اگر $a.b = 0$.

ه) $a.(b+c) = a.b + a.c$

توجه: بردارهای یکه i، j و k دو به دو برهم عمودند پس،

$$i.j = i.k = j.k = j.i = k.j = k.i = 0$$

همچنین $|i| = |j| = |k| = 1$ و همچنین $i.i = j.j = k.k = 1$

قضیه: اگر $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند، در این صورت:

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

حاصل $a.b$ همواره یک عدد است نه یک بردار.

مثال: نشان دهید بردارهای a و b برهم عمودند $a = (-4, 5, 7)$ و $b = (1, -2, 2)$:

$$a.b = ((-4)\times 1) + ((-2\times 5) + (2\times 7) = 0 \Rightarrow$$ بنابر ویژگی ضرب داخلی برهم عمودند.

مثال: زاویه بین دو بردار $a = (2, -1, 2)$ و $b = (1, -1, 0)$ را بیابید:

$$a.b = (2, -1, 2).(1, -1, 0) = 2 + 1 + 0 = 3$$

از طرفی داریم: $a.b = |a||b|\cos\theta$

$$3 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (2)^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (0)^2} \cdot \cos\theta$$

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{2}\cos\theta = 3\sqrt{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

a_{23} درسطر دوم و ستون سوم قرار دارد و در این مثال، این درایه ۲ می باشد. و در این مثال درایه a_{33} برابر صفر است

ماتریسی را که دارای m سطر و n ستون است ماتریس $m\times n$ (بخوانید m در n) می نامیم. وقتی که $m=n$، ماتریس را ماتریس مربعی از رتبه (مرتبه) n می نامیم. برای مثال $\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳×۲ است، حال آنکه ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۷ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۴×۳ است و $\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی از مرتبه ۲ است. اغلب نماد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

را به صورت $[a_{ij}]_{m\times n}$ خلاصه می کنیم. زیرنویس $m\times n$ اندازه ماتریس را نشان می دهد و کل نماد به معنی یک ماتریس $m\times n$ است که درایه سطر iام و ستون jام آن a_{ij} است.

فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی از مرتبه n است. درایه های a_{11}، a_{22}، ...، a_{nn} را درایه های قطر اصلی A می نامیم. اگر درایه های خارج از قطر اصلی A همگی صفر باشند آنگاه A را ماتریس قطری از مرتبه n می نامند. مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری مرتبه ۳ است. اگر درایه های بالای قطر اصلی A برابر صفر باشند آنگاه A را پایین مثلثی از مرتبه n می نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$ پایین مثلثی از مرتبه ۳ است. اگر درایه های پایین قطر اصلی صفر باشند آنگاه A را ماتریس بالا مثلثی از مرتبه n می نامند مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$ بالا مثلثی از مرتبه ۳ است.

تعریف: دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ مساوی اند اگر دارای مرتبه یکسان باشند یعنی $m=p$ و $n=q$، و به ازای هر i و هر j، $a_{ij}=b_{ij}$. اگر A و B مساوی باشند می نویسیم $A=B$.

جمع ماتریس ها، ضرب اسکالر در آنها:

تعریف: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس هم مرتبه باشند. در این صورت مجموع آنها، یعنی $A+B$ یک ماتریس $m\times n$ است: $A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$ و به صورت زیر تعریف می شود:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

مثال: مطلوب است زاویه بین $a=(1,1,0)$ و $b=(0,1,-1)$

$a.b=(1,1,0).(0,1,-1)=0+1+0=1$

$a.b=|a|.|b|\cos\theta$

$1=\sqrt{1^2+1^2+0^2}\,.\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\cos\theta=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos\theta \quad \cos\theta=\frac{1}{2} \quad \boxed{\theta=60^\circ}$

مثال: نشان دهید بردارهای a، b و c که در زیر تعریف شده‌اند دو به دو بر هم عمودند:

$a=(2,1,-1) \quad b=(3,7,13) \quad c=(20,-29,11)$

$a.b=(2,1,-1).(3,7,13)=6+7-13=0 \rightarrow$ عمودند

$a.c=(2,1,-1).(20,-29,11)=40-29-11=0$ 〃

$b.c=(3,7,13).(20,-29,11)=0$ 〃

تمامی مطالبی که تا کنون گفته شد (در خصوص $\mathbb{R}^3$) به هر فضای $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}$) قابل تعمیم است.

یعنی اگر $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ بردار باشد آنگاه $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ نیز برداری در $\mathbb{R}^n$ است.

جمع، ضرب داخلی، ضرب اسکالر، ... همگی برای $(a_1,\dots,a_n)$ به صورت گفته شده قابل تعمیم است.

جلسه چهارم

فصل دوم: ماتریس و دترمینان

ماتریس‌ها: ماتریس را به عنوان آرایه‌ای مستطیلی از اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعداد داخل آرایه را درایه‌های ماتریس می‌نامیم. زیرنویس‌های i و j در درایه a_{ij}، برای مشخص کردن سطر و ستونی که a_{ij} در آن‌ها قرار دارد به کار می‌رود. برای مثال $\begin{bmatrix} 13 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس است. درایه

همچنین برای عدد حقیقی داده شده r، حاصلضرب r در ماتریس A، یعنی rA، یک ماتریس $m\times n$ است: $rA=[d_{ij}]_{m\times n}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{ij}=ra_{ij}$$

برای مثال دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2&4\\1&5\\3&6\end{bmatrix}$ را نمی‌توانیم جمع کنیم، زیرا هم‌مرتبه نمی‌باشند ولی

مجموع دو ماتریس $C=\begin{bmatrix}2&3&5\\1&1&1\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}-2&0&5\\-1&0&0\end{bmatrix}$ ماتریس زیر می‌باشد:

$$C+D=\begin{bmatrix}0&3&10\\0&1&1\end{bmatrix}$$

همچنین ضرب اسکالر حقیقی ۲ در ماتریس A ماتریس زیر می‌باشد:

$$2A=\begin{bmatrix}2&4&6\\8&10&12\end{bmatrix}$$

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد. قرینه A را ماتریس $m\times n$ تعریف می‌کنیم که از حاصلضرب عدد -1 در ماتریس A بدست می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم. یعنی $-A=(-1)A$.

توجه کنید که مجموع A و $-A$، ماتریس $m\times n$ ای است که تمام درایه‌های آن صفر است. چنین ماتریسی را ماتریس صفر می‌نامیم و آن را با $O_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، تفاضل B از A را با $A-B$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A-B=A+(-B).$$

قضیه: فرض کنید A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه $m\times n$ باشند و r و s اعداد حقیقی. در این صورت:

الف) $A+B=B+A$ (جابجایی جمع)

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (شرکت‌پذیری جمع)

ج) $A+O=O+A=A$

د) $A+(-A)=(-A)+A=O$

هـ) $r(A+B)=rA+rB$ ن) $1A=A$.

و) $(r+s)A=rA+sA$

ز) $(rs)A=r(sA)$