درس انتقال حرارت (۱) : جلسه اول ,

سرفصل مطالب :

۱ـ مکانیزم‌های انتقال حرارت ، معادلات مربوطه

۲ـ انتقال حرارت هدایتی ، معادله یک بعدی هدایت ، معادله یک بعدی در مختصات استوانه ای و کره ، هدایت با تولید انرژی حرارتی
انتقال حرارت در سطوح گسترده و عملکرد آنها

۳ـ انتقال حرارت هدایتی دو بعدی و دائم در مختصات کارتزین ، استوانه‌ای و کروی ـ حل عددی مسائل انتقال حرارت

۴ـ هدایت گذرا در سیستم یکپارچه ، هدایت گذرای یک بعدی و دوبعدی ، حل عددی هدایت گذرا

۵ـ انتقال حرارت تشعشع ، شدت تشعشع ، تشعشع جسم سیاه و خاکستری ، ضریب شکل و ...

۶ـ انتقال حرارت جابجایی ، لایه مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی ، جریان آرام و مغشوش ، تشابه اصطکاک و انتقال حرارت
روابط تجربی جریان آرام و مغشوش ، جریان از روی استوانه و کره

۷ـ مبدل های حرارتی ، انواع مبدل های حرارتی ، مبدل های حرارتی با جریان موازی و مخالف روش NTU و ...

مرجع : کتاب انتقال حرارت اینکروپرا

Heat and mass transfer ; incropera

مکانیزم‌های انتقال حرارت؛

نکته: انتقال همواره بین دو جسمی صورت می‌پذیرد که با یکدیگر اختلاف دما داشته باشند
در واقع نیروی محرکه انتقال حرارت اختلاف دما می‌باشد.
به عبارتی اگر دو جسم در تعادل گرمایی باشند هیچ انتقال حرارتی بین آن دو صورت نمی‌پذیرد.

مکانیزم‌های انتقال حرارت:

۱- هدایتی (Conduction)

۲- جابجایی همرفت (Convection)
- جابجایی اجباری — Forced conv.
- جابجایی آزاد — Free conv.

۳- تشعشعی (Radiation)

انتقال حرارت هدایت: در این نوع انتقال حرارت فرض بر این است که انتقال گرما توسط عواملی مانند حرکت تصادفی مولکول‌ها و یا ارتعاشات شبکه کریستالی جامد انجام می‌شود.

تجربه نشان داده است که انتقال حرارت همیشه از ناحیه‌ای که دارای درجه حرارت بالا است به ناحیه‌ای که دارای درجه حرارت پایین‌تر است انتقال می‌یابد. و نرخ انتقال حرارت در واحد سطح متناسب با گرادیان نرمال درجه حرارت است.

q: انتقال حرارت یا شار حرارتی

A: مساحت سطح نرمال

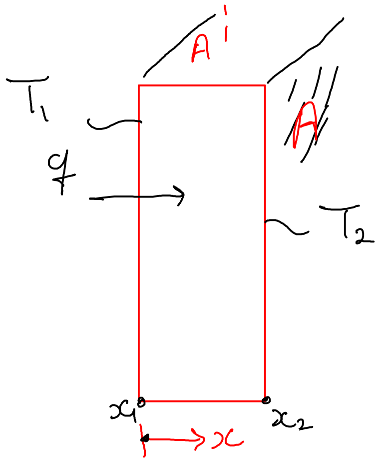
$$\frac{q}{A} \propto \frac{\partial T}{\partial x}$$

به جنس جسم بستگی دارد.

$$\frac{q}{A} = -K\frac{\partial T}{\partial x}$$

ضریب انتقال حرارت هدایتی

قانون هدایتی فوریه



$T_1 > T_2$

$T_2 < T_1$

$x_2 > x_1$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \simeq \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} < 0$$

$$K_{\text{جامدات}} > K_{\text{مایعات}} > K_{\text{گازها}}$$

q واحد ; W (وات) ; K واحد ; $W/m^{\circ}K$

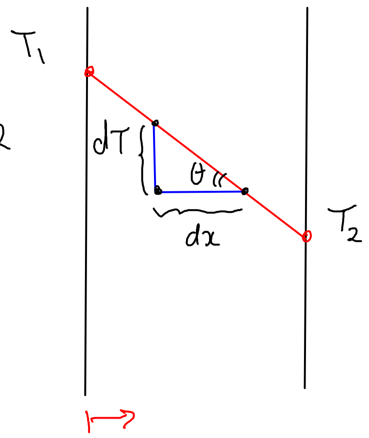
$$q = KA\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$W \quad ? \quad m^2 \quad \frac{^{\circ}K}{m}$$

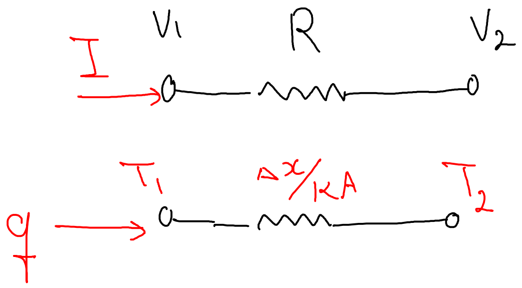
$$\xrightarrow{\text{باجدی}} \frac{dT}{dx} = \frac{q}{KA} \Rightarrow dT = \frac{q}{KA}dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} T = \frac{q}{KA}x + C$$

نکته: بسیاری از اجسام موجود در طبیعت دارای ضریب انتقال حرارت هدایتی هستند که مقدار آن با تغییرات دما، تغییر میکند

فرض: $T_1 > T_2$



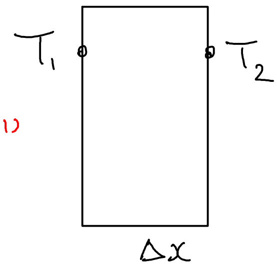
$$tg\,\theta = \frac{dT}{dx}$$



$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad (1^*)$$

$$q = KA\frac{dT}{dx} = KA\frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (1)$$

$$\hookrightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{KA}} \quad (2)$$



(1) = (2)

معادل سازی جریان الکتریسیته با هدایت حرارتی ;

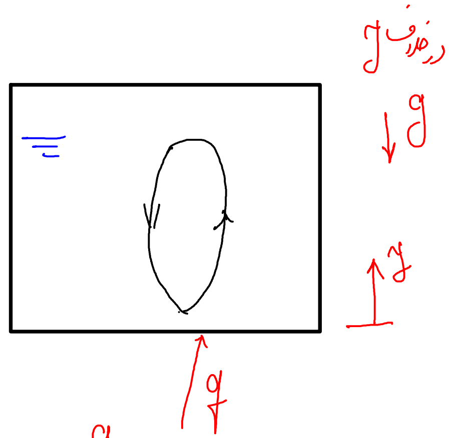
$$\begin{cases} \Delta V \equiv \Delta T \\ R \equiv \frac{\Delta x}{KA} \\ I \equiv q \end{cases}$$

۲- انتقال حرارت جابجایی (همرفت): زمانیکه یک سیال (مایع یا گاز) درمجاورت یک سطح جامد حرکت نماید وبین سطح جامد و سیال اختلاف دما وجود داشته باشد، انتقال حرارت جابجایی خواهیم داشت

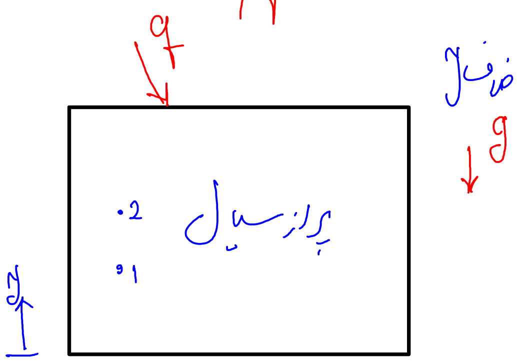
جابجایی بر دو نوع است : ۱- جابجایی اجباری (Forced convection) ۲- جابجایی آزاد Free (Natural) convection

جابجایی اجباری: هنگامیکه سطح جامد در مقابل جریان سیال (مایع یا گاز) (با دمای کمتر یا بیشتر) قرار میگیرد انتقال حرارت بین سیال و جسم جامد صورت می‌پذیرد که به آن انتقال حرارت جابجایی اجباری گفته می‌شود مثل پنکه

جابجایی آزاد: هنگامیکه سیال اطراف جسم در اثر اختلاف دما و در نتیجه اختلاف دانسیته با سیال محیط اطراف جابجا شود، انتقال حرارت آزاد یا طبیعی صورت می‌پذیرد.



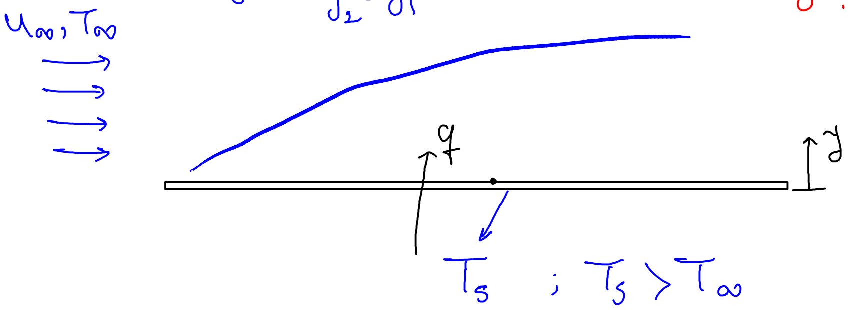
$$\frac{\partial T}{\partial y} < 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} > 0 \longrightarrow \text{جابجایی آزاد}$$



$$\frac{\partial T}{\partial y} > 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} < 0 \longrightarrow \text{جابجایی آزاد نخواهیم داشت}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{y_2 - y_1}$$

رابطه حاکم بر انتقال حرارت جابجایی اجباری :



در محل تماس سیال به سطح دیواره، طبق قانون عدم لغزش، سرعت سیال برابر صفر است

در نتیجه شروع انتقال حرارت از جسم جامد به سیال بوسیله انتقال حرارت هدایتی خواهد بود.

$$q = -KA \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \qquad (1)$$

در انتقال حرارت اجباری، قانون سرمایش نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود:

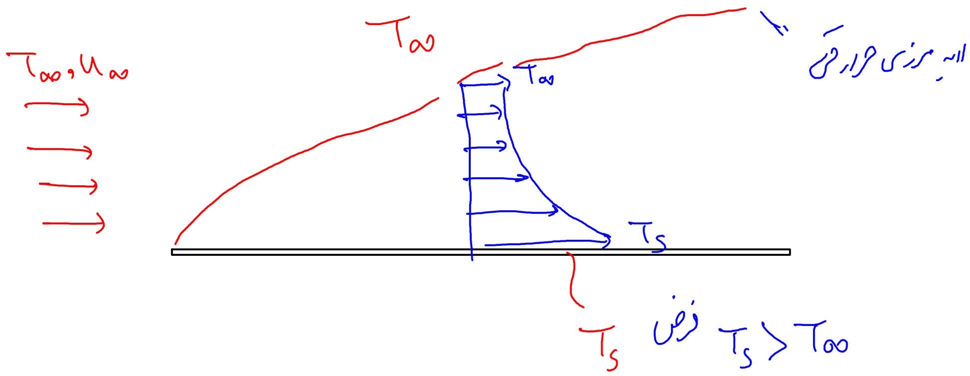
$$q = \underbrace{h}_{\text{ضریب انتقال حرارت جابجایی}} A (T_s - T_\infty) \qquad (2)$$

h : یک خاصیت سیال یا جسم جامد نمی‌باشد بلکه تابعی از سرعت سیال، نوع سیال و هندسه‌ای که سیال از آن عبور می‌کند دارد.

q انتقال یافته از صفحه به سیال مقداری ثابت می‌باشد در نتیجه روابط (1) و (2) یکسان خواهند بود:

$$-K\cancel{A}\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = h\cancel{A}(T_s - T_\infty) \Rightarrow \boxed{h = \frac{-K\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}} \quad *$$

اگر پروفیل دما (تغییرات دما) در سیال معلوم باشد می‌توان با استفاده از رابطه فوق (*) ؛ مقدار h را محاسبه نمود.



$$q = hA(T_s - T_\infty) \longrightarrow$$ h واحد: $W/m^2 \cdot {}^\circ K$ یا $W/m^2\,{}^\circ C$

بنام خدا ؛ انتقال حرارت (۱) ؛ جلسه دوم

انتقال حرارت تشعشعی : (Radiation heat Transfer)

همه اجسام با استفاده از امواج الکترومغناطیس در دمای بیشتر از صفر درجه کلوین از خود انرژی ساطع می کنند

به این نوع انتقال انرژی، انتقال حرارت تابشی (تشعشعی) گفته می شود.

انتقال حرارت تشعشعی به دو پارامتر اصلی بستگی دارد:
- نوع جسم
- دمای جسم

جسم سیاه: بعنوان یک جسم استاندارد پذیرفته شده است و جسمی است که همه انرژی ها را جذب می کند و همه انرژی ها را صادر می کند.

ضریب صدور ; $\varepsilon = \dfrac{\text{انرژی صادر شده از یک جسم به مساحت } dA}{\text{انرژی صادر شده از همان سطح اگر جسم سیاه فرض شود}}$

برای یک جسم سیاه، ضریب صدور برابر یک می باشد.

ضریب جذب ; $\alpha = \dfrac{\text{انرژی جذب شده توسط یک جسم به مساحت } dA}{\text{انرژی برخوردی به جسم}}$

برای یک جسم سیاه، ضریب جذب نیز برابر یک می باشد.

برای سایر اجسام ضریب جذب و صدور کوچکتر از یک می باشد.

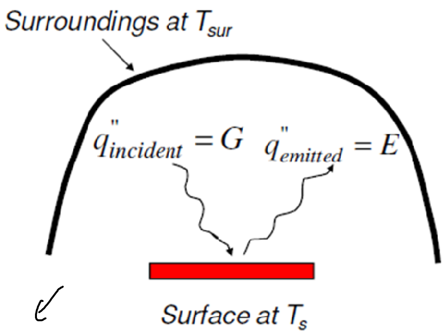
جسم خاکستری: جسمی است که ضریب جذب و صدور آن با هم برابر بوده و کوچکتر از یک می باشد

اگر جسم سیاه باشد ; $\alpha = \varepsilon = 1$

اگر جسم خاکستری باشد ; $\alpha = \varepsilon < 1$ — در جسم خاکستری ε و α تابعی از دما می باشد

مزیت این انتقال حرارت نسبت به انتقال حرارت هدایتی و جابجایی این است که می‌تواند در خلأ نیز انتقال یابد.

همچنانکه در محیط‌های مختلف نیز انتقال می‌یابد.



مقدار انرژی که یک جسم سیاه دارا می‌باشد با رابطه σT^4 نمایش داده می‌شود.

ثابت استفان بولتزمن: $\sigma = 5.67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$

T = دمای جسم برحسب کلوین

$$q_r = \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_{sur}^4)$$

برای جسم خاکستری ؛

$$\begin{cases} \text{انرژی ساطع شده} = \varepsilon\sigma A T_1^4 \\ \text{انرژی جذب شده} = \alpha\sigma A T_2^4 \end{cases}$$

خالص انرژی = انرژی صادر شده − انرژی جذب شده

$$q_r = \varepsilon\sigma T_1^4 - \alpha\sigma T_2^4 \xrightarrow[\alpha=\varepsilon]{\text{برای جسم خاکستری}} q_r = \varepsilon\sigma A(\underbrace{T_1^4}_{\text{دمای جسم}} - \underbrace{T_2^4}_{\text{دمای محیط}})$$

مثال: اگر یک جسم کروی خاکستری با ضریب صدور $\varepsilon = 0.8$ و دمای $20°C$ در داخل کوره‌ای با دمای $1000°C$ قرار گیرد. مقدار انرژی تابشی که جسم بدست می‌آورد را حساب کنید. شعاع کره = 5 cm

تقریبی

$$q_r = 0.8\times5.67\times10^{-8}\times A(293^4 - 1273^4) = - ----$$

مقدار (−) نشان‌دهنده این است که جسم از طریق انتقال حرارت تابشی، انرژی جذب می‌کند.

مثال: عایق مخصوص دارای قابلیت هدایتی $K = 10^{-3}\ W/m°C$ می‌باشد. چه ضخامتی از این عایق برای اگر بخواهیم برای افت درجه حرارت $500°C$ برای صفحه تخت، در انتقال حرارت $400\ W/m^2$ لازم است.

$$q'' = -K\frac{\Delta T}{\Delta x} = -10^{-3}\times\frac{500}{\Delta x} = 400 \Rightarrow \Delta x = 1.25\ cm$$

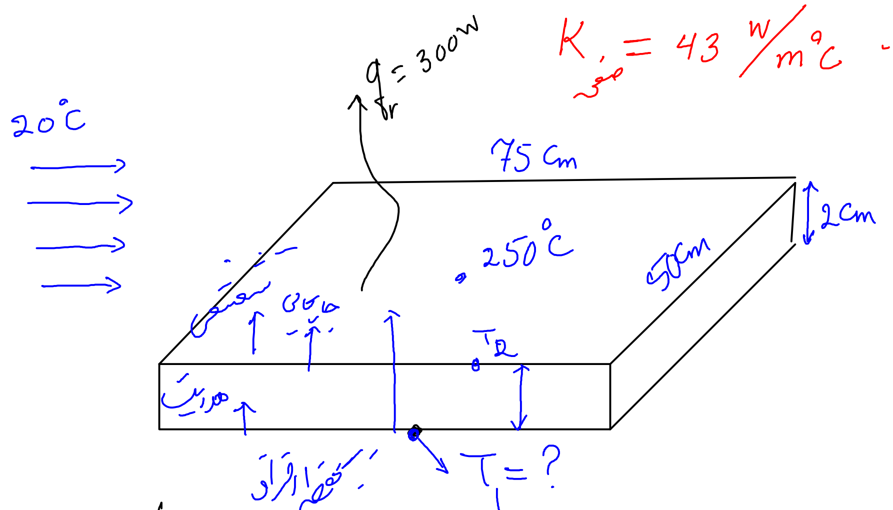
$$q_r = \varepsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) = \varepsilon \sigma A (T_1^2 + T_2^2)(T_1^2 - T_2^2)$$

$$\Rightarrow q_r = \underbrace{\varepsilon \sigma A (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}_{h_r}(T_1 - T_2)$$

$$q_r = h_r \, A \, (T_1 - T_2)$$

h_r: ضریب انتقال حرارت تابشی

مثال: هوا در دمای $20^\circ C$ بر روی صفحه ای به ابعاد $50 \times 75\ cm$ که درجه حرارت آن $250^\circ C$ است می وزد. ضریب انتقال حرارت جابجایی برابر $25\ W/m^2\,^\circ C$ می باشد. مقدار انتقال حرارت را محاسبه کنید. اگر ضخامت ورق $2\ cm$ باشد و $300\ W$ حرارت به واسطه تشعشع انتقال یابد. درجه حرارت داخلی صفحه را محاسبه کنید. $K_{صفحه} = 43\ W/m^\circ C$



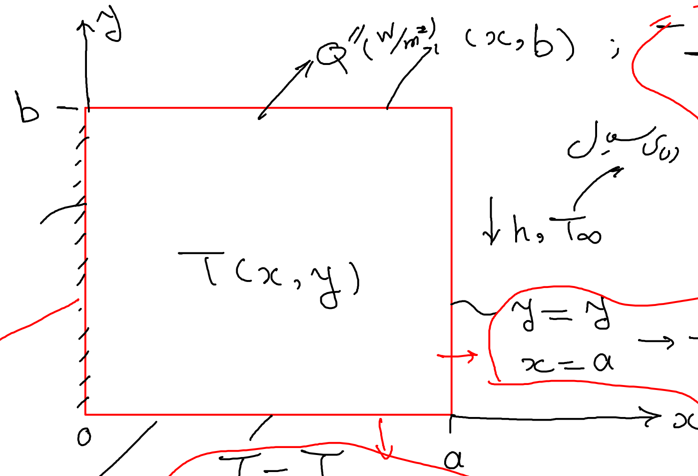
قسمت اول سوال : $q = hA(T_s - T_\infty) = 25\,(0.5 \times 0.75)(250 - 20)$

$$\Rightarrow q = 2156\ W$$

$$q_{دربدنه} = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x} = \text{انتقال حرارت جابجایی} + \text{انتقال حرارت تشعشعی}$$

$$-43 \times (0.5 \times 0.75) \times \frac{\overset{250}{T_2} - T_1}{0.02} = 2156 + 300$$

$$\Rightarrow T_1 = 2456 \times \left(\frac{0.02}{43 \times .75 \times .5}\right) + 250 \Longrightarrow \underline{T_1 = 253.05\ ^\circ C}$$



(x,b) ; $-K\dfrac{\partial T(x,b)}{\partial y} = q''$ شرایط مرزی

$$-K\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{x,b} = q''$$

روی سیال

$T(0,y)$

$$\frac{\partial T(0,y)}{\partial x} = 0$$

$$KA\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{0,y} = 0 \qquad KA \neq 0$$

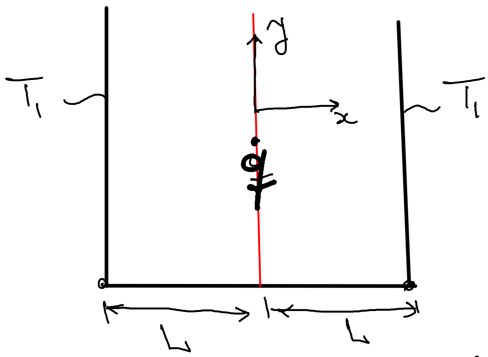
$y=y$, $x=a$ $\rightarrow$ $-KA\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{(a,y)} = hA(T_s - T_\infty)$

$$-K\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(a,y)} = h(T_s - T_\infty)$$

$x=x$, $y=0$ $\xrightarrow{\text{نوشتن}}$ $T(x,0) = T_1$

خاصیت عایق این است که از انتقال حرارت جلوگیری می‌کند ؛ $\dfrac{\partial T}{\partial (\,)} = 0$

مثال : توزیع دما در دیواره شکل نشان داده شده را در حالت دائمی بدست آورید.



$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{K} = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{K}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{K}x + C_1$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} T(x) = -\frac{\dot{q}}{2K}x^2 + C_1 x + C_2$$

شرایط مرزی :

$$\begin{cases} x=-L \rightarrow T=T_1 \Rightarrow T_1 = -\dfrac{\dot{q}}{2K}L^2 - LC_1 + C_2 & (1) \\ x=L \rightarrow T=T_1 \Rightarrow T_1 = -\dfrac{\dot{q}}{2K}L^2 + LC_1 + C_2 & (2) \end{cases}$$

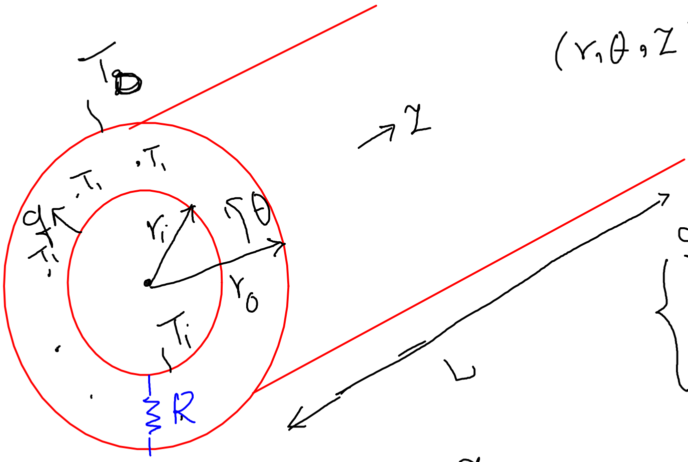
$$-\frac{\dot{q}}{\cancel{2K}}L^2 - LC_1 + \cancel{C_2} = -\frac{\dot{q}}{\cancel{2K}}L^2 + LC_1 + \cancel{C_2} \Rightarrow 2LC_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

در (۱) جایگذاری $\rightarrow$ $T_1 = -\dfrac{\dot{q}}{2K}L^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 + \dfrac{\dot{q}}{2K}L^2$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}}{2K}x^2 + T_1 + \frac{\dot{q}}{2K}L^2 \Rightarrow T(x) - T_1 = \frac{\dot{q}}{2K}(L^2 - x^2)$$

بنام خدا — انتقال حرارت (۱) : — جلسه چهارم

انتقال حرارت شعاعی در لوله : (حالت دائمی) (r, θ, z)



$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \; ; \; \frac{\partial T}{\partial z}=0 \; ; \; \frac{\partial T}{\partial r}\neq 0$$

$$\begin{cases} q=-KA\dfrac{dT}{dr} \\ A=2\pi r L \end{cases}$$

$$\Rightarrow q=-K(2\pi r L)\frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{2K\pi L}\frac{dr}{r}=-dT \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{q}{2\pi K L}\int_{r_i}^{r_o}\frac{dr}{r}=-\int_{T_i}^{T_o}dT$$

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi K L}\ln r\Big|_{r_i}^{r_o}=-(T)\Big|_{T_i}^{T_o} \Rightarrow \frac{q}{2\pi K L}(\ln r_o-\ln r_i)=T_i-T_o$$

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi K L}\ln\frac{r_o}{r_i}=T_i-T_o \Rightarrow q=\frac{T_i-T_o}{\ln\frac{r_o}{r_i}/2\pi K L} \quad (1)$$

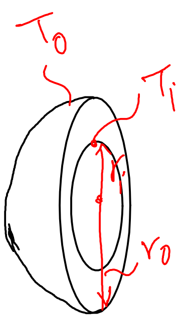
$$I=\frac{\Delta V}{R} \equiv q=\frac{\Delta T}{R} \quad ; (2)$$

پس با توجه به رابطه (۱) و (۲) : مقاومت معادل برای انتقال حرارت هدایتی دائم در داخل لوله برابر است با :

$$\boxed{R=\frac{\ln r_o/r_i}{2\pi K L}} \; ; \quad q=(KA)\Delta T/\Delta x$$

$$q=\frac{\Delta T}{R} \rightarrow R=\frac{\Delta T}{q} \; ; \quad {}^\circ K/W \text{ یا } {}^\circ C/W$$

انتقال حرارت هدایتی یک بعدی در داخل کره توخالی :



$$r, \theta, \varphi \; ; \; \frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \; , \; \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0 \; ; \; \frac{\partial T}{\partial r}\neq 0$$

$$\begin{cases} q=-KA\dfrac{dT}{dr} \\ A=4\pi r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -KA\dfrac{dT}{dr} \\ A = 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow q = -K(4\pi r^2)\frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{q}{4K\pi}\,\frac{dr}{r^2} = -dT$$

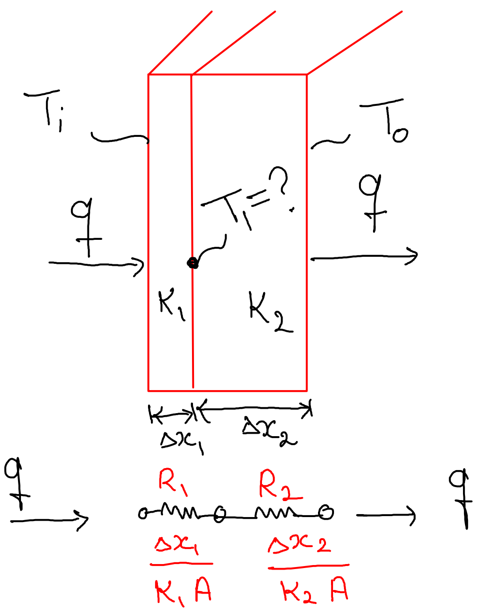
$$\text{انتگرال} \Rightarrow \frac{q}{4K\pi}\int_{r_i}^{r_o}\frac{dr}{r^2} = -\int_{T_i}^{T_o} dT \Rightarrow \frac{q}{4K\pi}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_i}^{r_o} = T_i - T_o$$

$$\Rightarrow \frac{q}{4K\pi}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}\right) = T_i - T_o \Rightarrow q = \frac{T_i - T_o}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}\right)/4K\pi}$$

$$R = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}{4K\pi}$$

دیوارهای چند لایه یا کامپوزیت : (در حالت دائمی)

برای تحلیل دیوارهای چند لایه ، از مقاومت معادل دیوارها استفاده می‌نماییم .



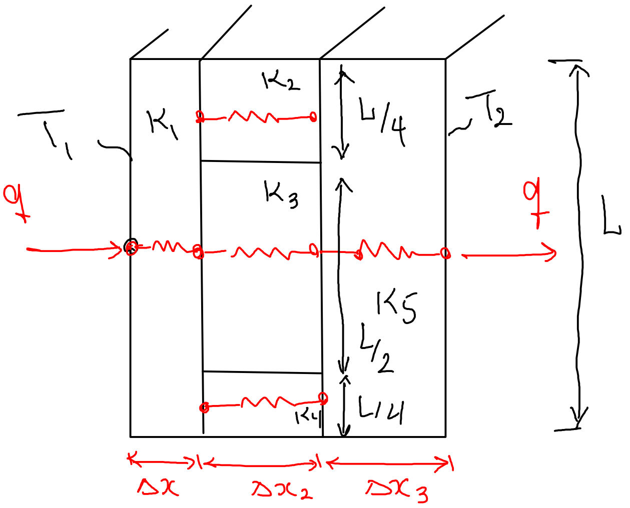
$$R_1 = \frac{\Delta x_1}{K_1 A} \quad ; \quad R_2 = \frac{\Delta x_2}{K_2 A}$$

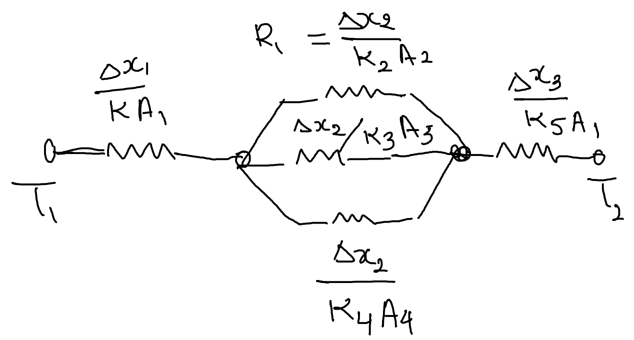
برای مقاومت سری ; $R_{tot} = R_1 + R_2$

$$I = \frac{\Delta V}{R_{tot}} \rightarrow q = \frac{T_i - T_o}{\frac{\Delta x_1}{K_1 A} + \frac{\Delta x_2}{K_2 A}}$$

برای محاسبه T_1 ، ابتدا q را بدست می‌آوریم :

$$q = \frac{T_i - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_o}{R_2}$$





$$R_{\text{موازی}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

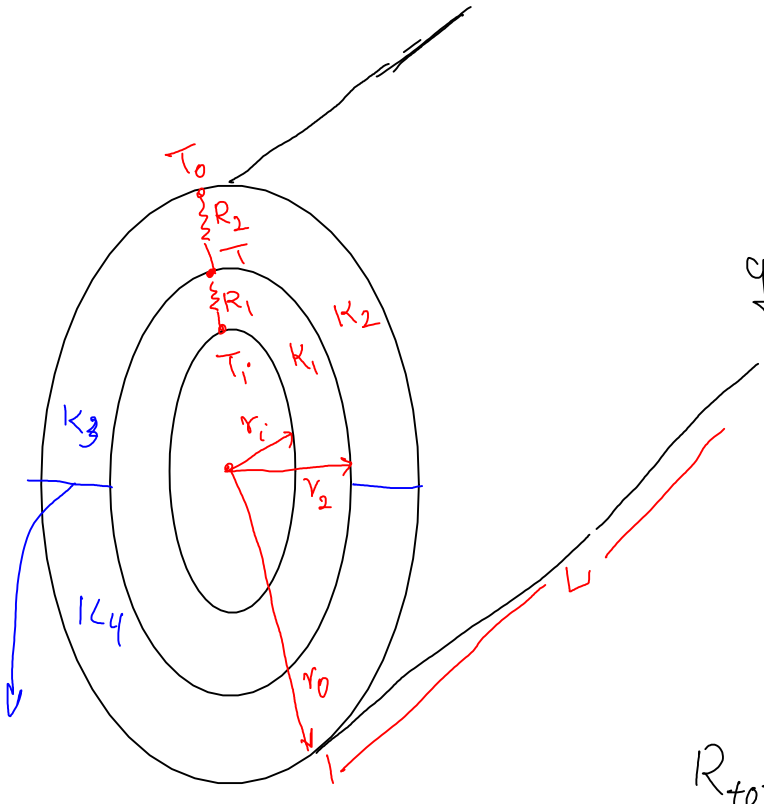
$$R_1 = \frac{\Delta x_1}{K_1 A_1} \; ; \quad R_2 = \frac{\Delta x_2}{K_2 A_2} \; ; \quad R_3 = \frac{\Delta x_2}{K_3 A_3} \; ; \quad R_4 = \frac{\Delta x_2}{K_4 A_4} \; ;$$

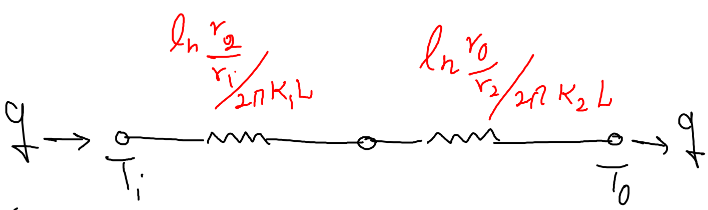
$$R_5 = \frac{\Delta x_3}{K_5 A_1} \; ; \quad A_2 = \frac{A_1}{4} \; ; \quad A_3 = \frac{A_1}{2} \; ; \quad A_4 = \frac{A_1}{4}$$

$$A_1 = A \; ; \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \; ; \quad R_{23,4} = \frac{R_{23} R_4}{R_{23} + R_4}$$

$$R_{tot} = R_1 + R_{23,4} + R_5 \; ; \quad q = \frac{T_1 - T_2}{R_{tot}}$$

انتقال حرارت دائم در لوله های کامپوزیت؟

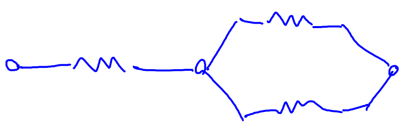




$$R_1 = \frac{\ln \frac{r_2}{r_i}}{2\pi K_1 L}$$

$$R_2 = \frac{\ln r_0/r_2}{2\pi K_2 l}$$

$$R_{tot} = R_1 + R_2$$



$$q = \frac{T_i - T_0}{R_{tot}}$$

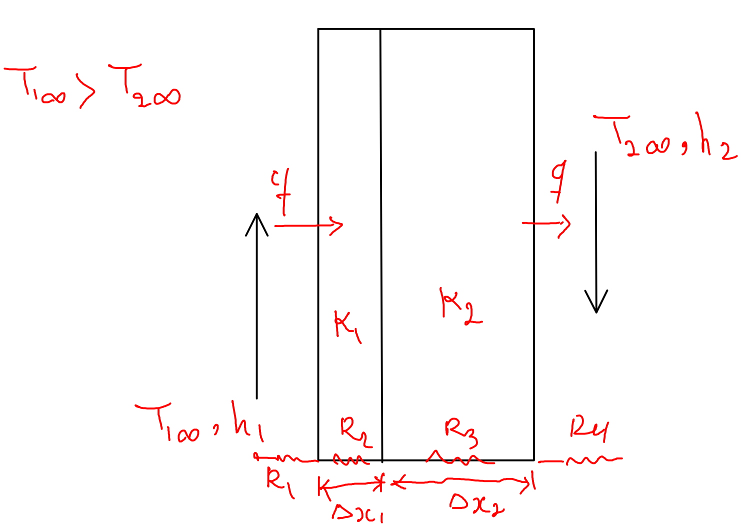
ضریب انتقال حرارت عمومی:

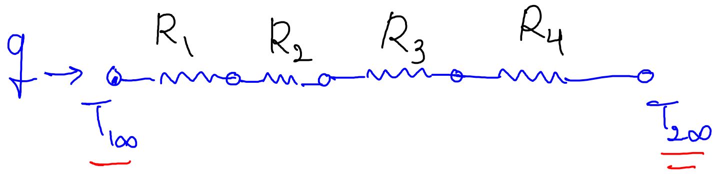
(حالت دائمی)

$$q = hA(T_s - T_\infty) \Rightarrow q = \frac{T_s - T_\infty}{1/hA}$$

مقاومت معادل برای انتقال حرارت جابجایی

اگر یک دیواره مرکب داشته باشیم که از دو طرف آن دو سیال با دمای $T_{1\infty}$ و $T_{2\infty}$ عبور کند. می‌خواهیم مقدار q عبوری از دیواره را بدست آوریم.





$$R_1 = \frac{1}{h_1 A} \; ; \; R_2 = \frac{\Delta x_1}{K_1 A} \; ; \; R_3 = \frac{\Delta x_2}{K_2 A} \; ; \; R_4 = \frac{1}{h_2 A}$$

$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{R_{tot}} \qquad R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

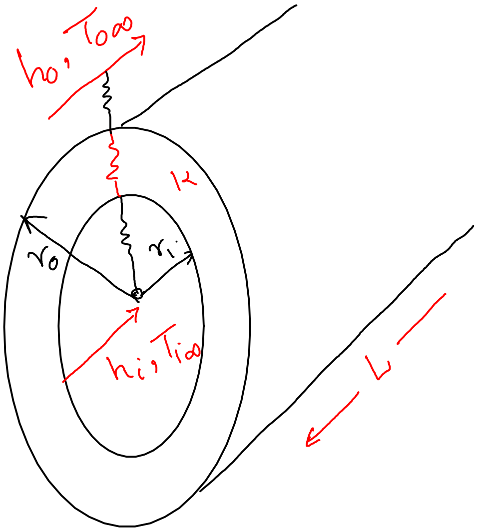
$$\Rightarrow q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{\Delta x_1}{K_1 A} + \frac{\Delta x_2}{K_2 A} + \frac{1}{h_2 A}} \Rightarrow q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\frac{1}{A}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{K_1} + \frac{\Delta x_2}{K_2} + \frac{1}{h_2}\right)}$$

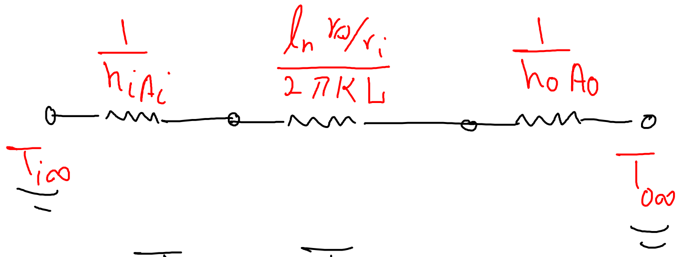
$$\Rightarrow q = \frac{A(T_{1\infty} - T_{2\infty})}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{K_1} + \frac{\Delta x_2}{K_2} + \frac{1}{h_2}} \; ; \quad q = U A \Delta T$$

ضریب انتقال حرارت عمومی

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{K_1} + \frac{\Delta x_2}{K_2} + \frac{1}{h_2}}$$

ضریب انتقال حرارت عمومی برای سیستم شعاعی:





$$q=\frac{T_{i\infty}-T_{o\infty}}{\frac{1}{h_iA_i}+\frac{\ln r_o/r_i}{2\pi KL}+\frac{1}{h_oA_o}}$$

ضریب انتقال حرارت عمومی بر اساس سطح دیواره داخلی لوله: $q=U A_i \Delta T$

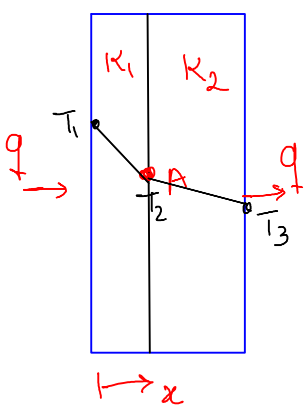
$$\Rightarrow q=\frac{A_i(T_{i\infty}-T_{o\infty})}{\frac{1}{h_i}+\frac{A_i\ln r_o/r_i}{2\pi KL}+\frac{A_i}{h_oA_o}}$$

$$\Rightarrow U_i=\frac{1}{\frac{1}{h_i}+\frac{A_i\ln r_o/r_i}{2\pi KL}+\frac{A_i}{h_oA_o}}$$

ضریب انتقال حرارت عمومی بر اساس سطح خارجی $\longrightarrow$ $U_o=\frac{1}{\frac{A_o}{h_iA_i}+\frac{A_o\ln r_o/r_i}{2\pi KL}+\frac{1}{h_o}}$

به عنوان تمرین بدست آورید.

سؤال: آیا در جدار تماس دو لایه یک دیواره کامپوزیت، گرادیان دما ثابت است؟



$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_A \overset{?}{=}$ ثابت یا $\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\overset{?}{=}\frac{\partial T_2}{\partial x}$

$q=$ ثابت ، $q=-K_1A\frac{\partial T_1}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial T_1}{\partial x}=-\frac{q}{K_1A}$

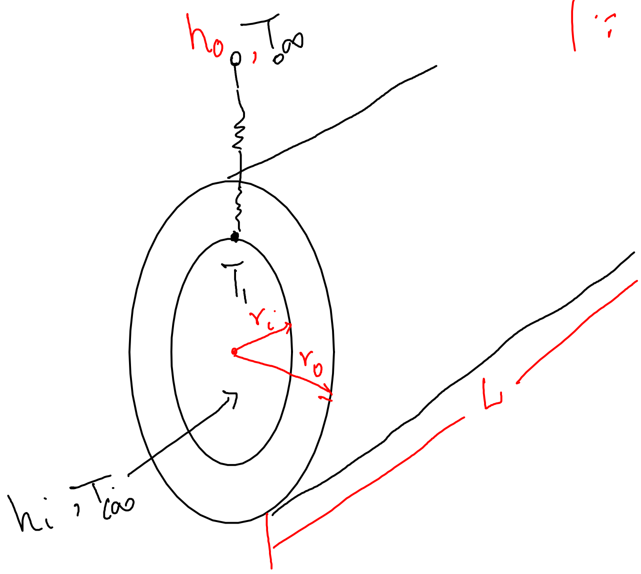
$q=-K_2A\frac{\partial T_2}{\partial x}\longrightarrow\frac{\partial T_2}{\partial x}=-\frac{q}{K_2A}$

چون $K_1\neq K_2$ می‌باشد پس $\frac{\partial T_1}{\partial x}$ و $\frac{\partial T_2}{\partial x}$ برابر نمی‌باشند.

رابطه فوق نشان می‌دهد که دما در نقطه تماس پیوسته می‌باشد ولی مشتق پذیر نمی‌باشد.

بنام خدا — انتقال حرارت (۱) — جلسه پنجم

ضخامت بحرانی عایق برای سیستم شعاعی:



شکل (1)

$$T_1 \;—\; \frac{\ln\frac{r_o}{r_i}}{2\pi k L} \;—\; \frac{1}{h_o A_o} \;—\; T_{\infty o}$$

اگر داخل لوله سیالی باشد آب در حرکت باشد:

شکل (2)

$$T_{i\infty} \;—\; \frac{1}{h_i A_i} \;—\; \frac{\ln r_o/r_i}{2\pi k L} \;—\; \frac{1}{h_o A_o} \;—\; T_{o\infty}$$

از شکل (1)
$$q = \frac{T_1 - T_{o\infty}}{\frac{\ln\frac{r_o}{r_i}}{2\pi k L} + \frac{1}{h_o A_o}} \quad (1)$$

؛ از شکل (2)؛
$$q = \frac{T_{i\infty} - T_{o\infty}}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln r_o/r_i}{2\pi k L} + \frac{1}{h_o A_o}} \quad (2)$$

برای بررسی تغییرات q نسبت به r_o ، از q نسبت r_o مشتق گیری کرده و مساوی صفر قرار میدهیم.

$$A_o = 2\pi r_o L$$

از معادله (1) ؛
$$q = \frac{T_1 - T_{o\infty}}{\frac{\ln\frac{r_o}{r_i}}{2\pi k L} + \frac{1}{h_o(2\pi r_o L)}}$$
; $\ln r_o/r_i = \ln r_o - \ln r_i \longrightarrow \frac{d}{dr_o} = 1/r_o$

ضریب انتقال حرارتی عایق

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 \Longrightarrow \frac{-\left[\frac{1}{2\pi k L}\left(\frac{1}{r_o}\right) + \frac{1}{2\pi h_o L}\left(-\frac{1}{r_o^2}\right)\right](T_1 - T_{o\infty})}{(\text{مخرج})^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi k L}\left(\frac{1}{r_o}\right) - \frac{1}{2\pi h_o L}\left(\frac{1}{r_o^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi L r_o}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h_o r_o}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K} - \frac{1}{h_o r_o} = 0 \Rightarrow \frac{1}{K} = \frac{1}{h_o r_o} \Rightarrow \underbrace{r_o = \frac{K}{h_o}} = r_{critical}$$

$r_{cr} =$ شعاع بحرانی

بسط تیلور ; $q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$

$$0 = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + dq_{conv} \quad ; \quad \begin{cases} q_x = -KA_c \dfrac{dT}{dx} \\ dq_{conv} = hA_s (T - T_\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_c = \text{سطح عمود بر انتقال انرژی هدایتی} = zt \\ A_s = \text{" " " جابجایی} = \underbrace{(2z+2t)}_{p} dx = p\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(-KA_c \frac{dT}{dx}\right)dx + h\underbrace{A_s}\,(T - T_\infty) = 0$$ رابطه کلی برای فین ها

اگر $K = cte$ و A_c ثابت ; در اینصورت می‌توان نوشت :

$$\rightarrow -KA_c \frac{d^2T}{dx^2}\cancel{dx} + hp\,\cancel{dx}\,(T - T_\infty) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{KA_c}(T - T_\infty) = 0 \qquad (1)$$

تغییر متغیر ; $\theta = T - T_\infty$; $\frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$; $\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d^2T}{dx^2}$

$$\frac{hP}{KA_c} = m^2 \quad \xrightarrow{\text{جایگذاری در (1)}} \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \qquad (2)$$

[یادآوری ; $y'' - a^2 y = 0$; $(D^2 - a^2)y = 0 \rightarrow D^2 - a^2 = 0 \Rightarrow D = \pm a$

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} \quad)$$

با توجه به یادآوری فوق : جواب معادله (2) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \longrightarrow \theta \sim x$$

جواب اخیر یک جواب کلی برای فین‌ها، با شرایط مذکور می‌باشد.

$$\boxed{\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}}$$

ضرایب C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی محاسبه می‌شوند؛

برای فین‌ها (سطوح گسترده) چهار نوع شرط مرزی در نظر گرفته می‌شود:

شرط اول: $x=0 \longrightarrow T=T_b \Rightarrow T-T_\infty = T_b - T_\infty \rightarrow \theta = \theta_b$

شرط دوم:

فین خیلی بلند فرض شود: $T(L) = T_\infty \longrightarrow T - T_\infty = 0 \rightarrow \theta = 0$

فین در انتهای عایق باشد: $x=L \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \longrightarrow x=L \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$

فین در انتهای دارای دمای معین (T₁) باشد: $x=L \rightarrow T = T_1 \Rightarrow x=L \rightarrow \theta = \theta_1$

فین در انتهای دارای انتقال حرارت جابجایی باشد: $x=L \rightarrow -k\frac{\partial T}{\partial x} = h(T-T_\infty)$

یا $x=L \Rightarrow -k\frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta$

شرایط (۱) ;
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \theta = \theta_b & (1) \\ x\to\infty \Rightarrow \theta = 0 & (2) \end{cases} ;\quad \theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

چون $x \to \infty \Rightarrow \theta \to 0$ در نتیجه باید ضریب C_1 برابر صفر فرض شود چون در غیر اینصورت

با میل کردن $x \to \infty$، θ نیز به سمت ∞ میل می‌کند.

شرط اول $\rightarrow$ $x=0 \rightarrow \theta = \theta_b \Rightarrow \theta_b = C_2 \Rightarrow C_2 = \theta_b$

جایگذاری $\rightarrow$ $\theta = \theta_b e^{-mx}$ یا $\underbrace{\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}}$

بنام خدا　　انتقال حرارت (۱)　　جلسه ششم

یادآوری: نحوه بدست آوردن معادله انتقال حرارت برای فین‌های خیلی بلند ($x \to \infty \; ; \; T \to T_\infty$) و فین هایی که انتهای آنها دارای عایق می‌باشد بایستی یادگرفته شود.

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

برای فین انتها عایق ;

شرط اول برای همه فین‌ها : $x=0 \longrightarrow \theta=\theta_b \longrightarrow C_1 + C_2 = \theta_b \quad (1)$

شرط دوم برای فین انتها عایق ; $x=L \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x}=0 \longrightarrow \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=L}=0$

مشتق گیری از θ نسبت به x $\longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx}$

جایگذاری به جای $x \to L$ $\longrightarrow \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=L}=0 \Longrightarrow mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL} = 0 \quad (2)$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \theta_b \\ m\left(C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}\right) = 0 \xRightarrow{m \neq 0} C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0 \end{cases}$$

با توجه به معادلات اخیر ضرایب C_1 و C_2 محاسبه خواهند شد.

استفاده از کرامر ; ضرایب C_1, C_2 $\longrightarrow$ ماتریس ضرایب $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{mL} & -e^{-mL} \end{bmatrix}$

ماتریس جواب ; $B \begin{bmatrix} \theta_b \\ 0 \end{bmatrix}$

دترمینان ماتریس ضرایب ; $|A| = -e^{-mL} - e^{mL}$

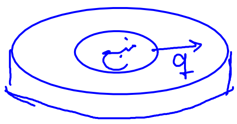
برای محاسبه C_1، به جای ستون اول (ضرایب C_1) ماتریس جواب قرار داده می‌شود:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \theta_b & 1 \\ 0 & e^{-mL} \end{vmatrix}}{-e^{-mL} - e^{mL}} = \frac{e^{-mL}\,\theta_b}{-e^{-mL} - e^{mL}} \quad ; \quad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \theta_b \\ e^{mL} & 0 \end{vmatrix}}{-e^{-mL} - e^{mL}} = \frac{-e^{mL}\,\theta_b}{-e^{-mL} - e^{mL}}$$

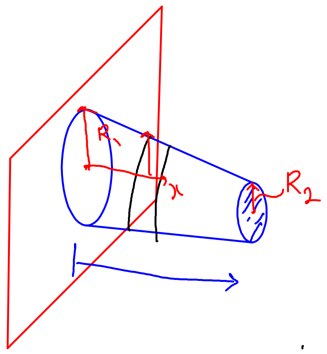
با جایگذاری در معادله اصلی به جای ضرایب C_1 و C_2 ؛ جواب θ برای فین انتها عایق بصورت زیر خواهد بود:

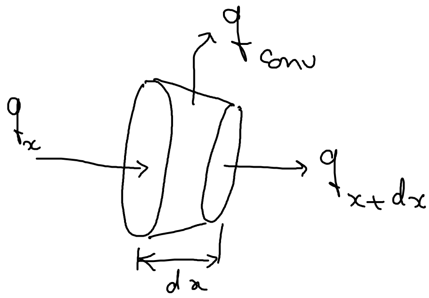
$$\theta = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}\,\theta_b$$

تمرین : معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت را برای یک فین حلقوی بدست آورید.



پره با سطح متغیر :





بالانس انرژی $\longrightarrow \quad q_x = q_{x+dx} + q_{conv}$

جایگذاری جملات $\longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(-KA_c\frac{dT}{dx}\right)dx + h\,(dA_s)(T-T_\infty)=0$

$$\frac{dA_c}{dx}\neq 0 \quad ; \quad \frac{dA_s}{dx}\neq 0$$

طرفین معادله فوق بر dx تقسیم ؛ $\frac{d}{dx}\left(-KA_c\frac{dT}{dx}\right)+h\left(\frac{dA_s}{dx}\right)(T-T_\infty)=0$

($K=$ ثابت) ، مشتق گیری $\longrightarrow -\frac{dA_c}{dx}\cdot\frac{dT}{dx}\times K - KA_c\frac{d^2T}{dx^2}+h\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$

طرفین بر $-KA_c$ تقسیم $\longrightarrow \boxed{\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{1}{A_c}\frac{dA_c}{dx}\cdot\frac{dT}{dx}-\frac{h}{KA_c}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0}$

دو پارامتر مهم برای فین ها :

۱- اثر بخشی فین :

اپسیلون

$$\varepsilon_f=\frac{\text{نرخ انتقال حرارت از فین}}{\text{نرخ انتقال حرارت زمانیکه فین نداشته باشیم}}$$

۲- راندمان فین

$$\eta=\frac{\text{نرخ انتقال حرارت از فین}}{\text{نرخ انتقال حرارت از فین درصورتیکه کل فین در دمای ریشه باشد}}$$

θ_b

نرخ انتقال حرارت از فین $= q_f = -KA_c \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=0}$

نرخ حرارتی که از فین به محیط انتقال می‌یابد برابر است با نرخ انتقال حرارتی که از منبع حرارتی در $x=0$ وارد فین می‌شود.

فین خیلی بلند ;
$$\begin{cases} \theta = e^{-mx}\theta_b \\ \theta = T - T_\infty \; ; \; \theta_b = T_b - T_\infty \end{cases}$$

$$q_f = -KA_c\left(-m e^{-mx}\right)\Big|_{x=0} = KA_c m\theta_b \; ; \; m = \sqrt{\frac{hP}{KA_c}}$$

$$\Rightarrow q_f = KA_c\sqrt{\frac{hP}{KA_c}}\,\theta_b = \sqrt{hPKA_c}\,\theta_b$$

نرخ انتقال حرارت در صورت عدم وجود فین از سطح تماس فین با منبع حرارتی ; $q = hA_c(T_b - T_\infty) = hA_c\theta_b$

اثربخشی برای فین خیلی بلند
$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{q} = \frac{\sqrt{hPKA_c}\,\cancel{\theta_b}}{hA_c\,\cancel{\theta_b}} = \sqrt{\frac{KP}{hA_c}}$$

نکته: معمولاً فین‌ها برای سیستم‌هایی طراحی می‌شوند که اثربخشی آن بزرگتر یا مساوی ۲ باشد.
$\varepsilon_f \geq 2$

نکته: فین برای مکان‌هایی طراحی می‌شود که دارای ضریب انتقال حرارت جابجایی (h) پایین باشد چون در اینصورت با توجه به رابطه اثربخشی فین، فین موثرتر خواهد بود.

محاسبه راندمان برای فین خیلی بلند:

$$\eta_f = \frac{q_f}{\text{نرخ انتقال حرارت اگر کل فین در دمای ریشه باشد} \rightarrow q'}$$

$$q' = hA_s(T_b - T_\infty) = hA_s\theta_b \; ; \; A_s = \text{سطح جانبی} = PL$$

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hPKA_c}\,\cancel{\theta_b}}{hPL\,\cancel{\theta_b}} \Rightarrow \eta_f = \frac{\sqrt{\frac{KA_c}{hP}}}{L} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{KA_c}{hP}} = \frac{1}{mL}$$

فین انتها عایق :

$$\theta = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}\theta_b \quad ; \quad q_f = -kA_c \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\cosh(mL)}\left[-m\sinh[m(L-x)]\right]\theta_b$$

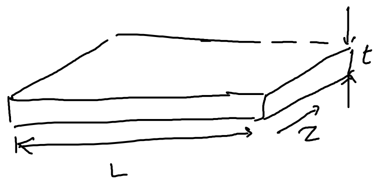
$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{\cosh(mL)}\left[-m\sinh(mL)\right] = -m\theta_b \,\mathrm{tgh}(mL)$$

$$q_f = -kA_c \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0} = \theta_b k A_c \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}\,\mathrm{tgh}(mL) = \sqrt{hPkA_c}\,\theta_b\,\mathrm{tgh}(mL)$$

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{q} = \frac{\sqrt{hPkA_c}\,\cancel{\theta_b}\,\mathrm{tgh}(mL)}{hA_c\,\cancel{\theta_b}} = \sqrt{\frac{kP}{hA_c}}\,\mathrm{tgh}(mL)$$

$$\eta_f = \frac{q_f}{q'} = \frac{\mathrm{tgh}(mL)}{mL}$$

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}\,L$$



$$P = 2z + 2t \qquad A_c = zt \quad ; \qquad z >> t \longrightarrow 2z + 2t \simeq 2z$$

$$\Rightarrow mL = \sqrt{\frac{h(2\cancel{z})}{k\,\cancel{z}\,t}}\,L = \sqrt{\frac{2h}{kt}}\,L = \sqrt{\frac{2h}{ktL}}\,L^{3/2}$$

$Lt = A_p =$ سطح پروفیل فین

$$\eta_f = \frac{\mathrm{tgh}\left[\sqrt{\frac{2h}{kA_p}}\,L^{3/2}\right]}{\sqrt{\frac{2h}{kA_p}}\,L^{3/2}} \qquad (1)$$

نکته: اگر $\left(\frac{ht}{2k}\right)^{1/2} < 1/2$ باشد آنگاه برای محاسبه راندمان فین‌هایی که در انتها عایق نیستند

در رابطه (۱) به طول فین مقدار $\frac{t}{2}$ را اضافه کرده که به آن طول تصحیح شده می‌نامند. خطای چنین تقریبی

حدود ۵٪ می‌باشد.

$$\eta_f = \frac{\mathrm{tgh}\left[\sqrt{\frac{2h}{kA_p}}\,(L+t/2)^{3/2}\right]}{\sqrt{\frac{2h}{kA_p}}\,(L+t/2)^{3/2}} \qquad A_p = (L + t/2)\,t$$